

Esercitazione del 15 gennaio 2015

Giorgio Saracco*

1 EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL II ORDINE

Un'equazione differenziale è detta del II ordine se nell'equazione la derivata di ordine maggiore ha ordine due. Nel seguito con c_1, c_2 indichiamo costanti reali.

1.1 LINEARI OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

Si tratta di equazioni differenziali della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \quad (1.1)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Si scrive il polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

e si risolve in λ ottenendo λ_1, λ_2 .

Caso 1 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono distinti. La soluzione allora è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x};$$

Caso 2 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono uguali. La soluzione allora è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x};$$

Caso 3 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ovvero sono numeri complessi non reali, tra loro coniugati. Detto $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, la soluzione allora è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

*giorgio.saracco@unife.it

1.2 LINEARI NON OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x), \quad (1.2)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e g sufficientemente regolare (vedi teoria spiegata da Luca). Si risolve prima l'equazione omogenea associata, ovvero

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0,$$

trovando, come descritto sopra, una soluzione $y_O(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. La soluzione del problema è quindi data da

$$y(x) = y_O(x) + \bar{y}(x),$$

dove $\bar{y}(x)$ è detta soluzione particolare e si trova con il metodo di Lagrange (anche detto del Wronskiano o della variazione delle costanti). Tale metodo dice che

$$\bar{y}(x) = \psi_1(x) y_1(x) + \psi_2(x) y_2(x),$$

dove ψ_1, ψ_2 si ricavano integrando le soluzioni ψ'_1, ψ'_2 del sistema

$$\begin{cases} \psi'_1(x) y_1(x) + \psi'_2(x) y_2(x) = 0 \\ \psi'_1(x) y'_1(x) + \psi'_2(x) y'_2(x) = g(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

1.3 DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI

Le formule risolutive precedenti danno una famiglia di soluzioni della corrispondente equazione differenziale al variare dei valori assunti dalle costanti.

La costante si determina qualora si tratti di risolvere un problema di Cauchy (anche detto problema ai valori iniziali). Infatti vengono assegnati due dati aggiuntivi, del tipo $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_1) = y_1$ dove $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$. Tali informazioni permettono, tramite sostituzione di ricavare i valori delle costanti.

1.4 ESERCIZI

Si risolvano le seguenti. Si determini infine il valore delle costanti per il problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.

- $y'' - 2y' - 3y = 0$;
- $y'' + 2y' + y = 0$;
- $y'' + 4y = 0$;
- $y'' - 4y' + 5y = 0$;
- $y'' - 2y' = 0$;
- $y'' + 9y = 0$;
- $y'' - 2y' + y = 0$;
- $y'' - 3y' + 2y = 0$;
- $y'' + 2y' + y = 0$;
- $y'' - 2y' - 3y = 6$;
- $y'' + 2y' + y = 0$;
- $y'' + 4y = 4$;

- $y'' - 2y' = 2;$

- $y'' - 2y' + y = x;$

- $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x};$

- $y'' + y = 1/\sin(x);$