

Serie

Giorgio Saracco*

1 ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n \geq 1} \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right).$$

Proof. La serie in questione è telescopica. Infatti

$$\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \log(n+1) - \log(n+2).$$

Pertanto

$$\sum_{n \geq 1} \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \log(2) - \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+2) = -\infty.$$

□

Esercizio 2. Si determini il carattere della seguente serie al variare di $\beta > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n \geq 1} n^\alpha \beta^n.$$

Proof. Utilizziamo il criterio del rapporto e studiamo a_{n+1}/a_n . Abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha \beta^{n+1}}{n^\alpha \beta^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \beta.$$

Allora se

*giorgio.saracco@unife.it

1. se $\beta \in (0, 1)$, il criterio del rapporto mi assicura la convergenza;
2. se $\beta = 0$, il criterio del rapporto non è applicabile;
3. se $\beta > 1$, il criterio del rapporto dà la divergenza.

Rimane pertanto da stabilire il comportamento qualora $\beta = 1$. In tal caso il termine generale della serie è n^α , ovvero l'armonica che converge se e solo se $\alpha < -1$. \square

Esercizio 3. Si determini il carattere della seguente serie

$$\sum_{n \geq 1} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right).$$

In caso sia convergente, si dica se è anche assolutamente convergente.

Proof. Utilizzando la formula del seno di una somma di angoli otteniamo

$$\begin{aligned} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) &= \sin(n\pi) \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n\pi) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Poiché si tratta di una serie a termini di segno alterno e poiché $\sin(1/n)$ è infinitesima e monotona decrescente si può applicare il criterio di Leibniz e concludere con la convergenza. Per quanto riguarda la convergenza assoluta questa non c'è poiché $\sin(1/n) \approx 1/n$ la cui serie diverge. \square

Esercizio 4. Si determini per quali $\alpha > 0$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n \geq 1} n^{1-2\alpha} + \sin(n^{-\alpha/3}).$$

Proof. La serie è a termini positivi, pertanto ci interessa che convergano entrambi i pezzi da cui è composta. In particolare

$$\sum_n n^{1-2\alpha},$$

converge se e solo se $\alpha > 1$, mentre

$$\sum_n \sin(n^{-\alpha/3}) \approx \sum_n n^{-\alpha/3},$$

converge se e solo se $\alpha > 3$. Pertanto la serie data converge se e solo $\alpha > 3$. \square