Origami: Geometria con la carta (I)

La valenza artistica, creativa ed estetica dell'Origami, è ormai nota a tutti. Il prof. Benedetto Scimemi in [1] riporta tra l'altro:

> *"....L'apporto educativo di giochi e passatempi basati sul piegare la carta è stato ampiamente riconosciuto dai pedagogisti, perché si tratta di attività che richiedono un controllo simultaneo manuale ed intellettuale ma lasciano grande spazio alla fantasia ed alla creatività....".*

Non altrettanto nota la sua applicazione in ambito matematico, soprattutto nell'ambiente scolastico. Vorremmo, dalle pagine di questo quaderno cercare di far conoscere ed apprezzare agli operatori della scuola, le grandi potenzialità didattiche offerte da questa tecnica. Cominciamo col mostrare l'interpretazione matematica delle regole di base.

Procedure euclidee elementari

La geometria euclidea, in assoluto il primo sistema logico assiomatico a noi noto, è fondata su alcuni Enti fondamentali: punto, retta, piano e su ben noti Postulati. Sul piano euclideo possiamo, usando come unici strumenti una riga non graduata ed un compasso, considerare come "lecite" le seguenti procedure [2] [3]:

- **E1** "Dati due punti distinti P e Q è possibile, usando la riga, tracciare l'unico segmento che congiunge i due punti e prolungarlo in entrambi i versi".
- **E2** "Dato un punto ed un segmento è possibile, usando il compasso, tracciare l'unica circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio".

Le applicazioni E1 ed E2, generano rette e circonferenze; su questi nuovi enti sono permesse le seguenti procedure d'intersezione che generano a loro volta nuovi punti:

- **E3** "Date due rette non parallele è possibile determinare il loro punto di intersezione".
- **E4** "Data una circonferenza ed una retta tale che la sua distanza dal centro sia minore del raggio, è possibile determinarne i punti di intersezione".

E5 "Date due circonferenze tali che:

a) nessuna delle due contiene il centro dell'altra e la distanza tra i centri è minore della somma dei raggi

B) una contiene il centro dell'altra e la distanza tra i centri non è minore della differenza tra i raggi, allora è possibile determinarne le intersezioni".

Una costruzione geometrica è detta eseguibile con i metodi euclidei della riga e del compasso, se ottenuta iterando un numero finito di volte le procedure **E1-E5** precedenti e solo esse.

Geometria origami

Unico ente fondamentale della geometria origami [2] [3] è un foglio di carta, pensato illimitato, che chiameremo piano, trasparente, sottile, ma abbastanza robusto, di spessore uniforme, non deformabile in maniera apprezzabilelungo la sua superficie, cioè non elastico; è invece deformabile perpendicolarmente alla sua superficie, per permetterne la sovrapposizione di alcune sue parti, ottenendo così quella che chiameremo piega.

Postulati

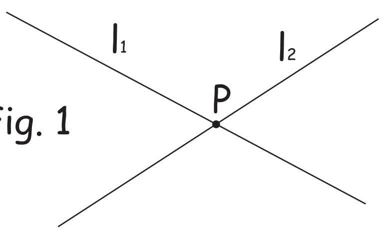
1. La traccia di una piega è un segmento rettilineo (limitatamente al foglio). Il punto risulta essere l'intersezione di due pieghe.
2. Data un piega, è possibile sovrapporre la piega a se stessa. La superficie è allora divisa in quattro angoli uguali attorno al punto di intersezione. Chiamiamo retto (R) ciascuno di questi angoli.

Procedure geometriche elementari della geometria origami

O1. "Date due pieghe non parallele l1 ed l2, è possibile determinarne il loro punto di intersezione P (fig. 1)". Questa procedura specifica come ottenere punti: dall'intersezione di due pieghe.

O2. "Date due pieghe parallele l1 ed l2, è possibile piegare, in maniera univoca, l1 su l2 ottenendo una piega m parallela ed equidistante da entrambe (fig. 2)

Fig. 1



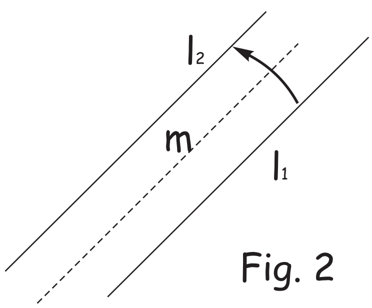


Fig. 2

O3 "Date due pieghe incidenti l1 ed l2, è possibile piegare, in due distinti modi, sovrapponendo l1 ad l2 ottenendo così le bisettrici degli angoli formati dalle due pieghe (fig. 3)". Questa procedura permette di costruire la bisettrice di un angolo. Le bisettrici ottenute sono tra loro perpendicolari.

O4 "Dati due punti distinti A e B, è possibile piegare, sovrapponendo ciascuno di questi due punti a se stesso (fig. 4a), ottenendo la piega che li congiunge (fig. 4b)".

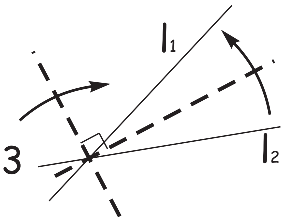


Fig. 3

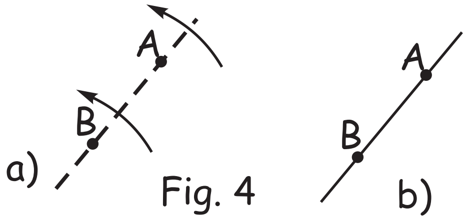


Fig. 4

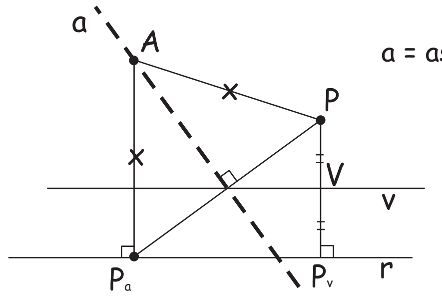
O5 "Dati due punti distinti A e B, è possibile piegare, sovrapponendo il punto A al punto B (fig. 5a), ottenendo la piega r, asse del segmento AB (fig. 5b)".

Fig. 5

O6 "Data una piega r ed un punto $P \notin r$, è possibile piegare, sovrapponendo contemporaneamente il punto P su se stesso e la piega r su se stessa (fig. 6a), per ottenere l'unica piega per P perpendicolare alla piega r (fig. 6b)".

Fig. 6

O7 "Dato un punto P ed una piega r non passante per P e scelto $P_a \notin r$, è possibile piegare sovrapponendo P a P_a, ottenendo una tangente a alla parabola di fuoco P e direttrice r", che d'ora in poi chiameremo $\gamma(P,r)$ (fig. 7).



a = asse di PP_a (tangente a $\gamma(P,r)$ in A)

Fig. 7

Consideriamo la piega a che si ottiene dalla sovrapposizione di P a Pa e dimostriamo (fig. 7) che tale piega è tangente alla parabola in A, cioè che ha un solo punto in comune con la $\gamma(P,r)$. Infatti, per **O5**, si ha che la piega a risulta essere asse del segmento PPa e quindi ogni suo punto è equidistante da P e da Pa. Mandiamo per Pa la perpendicolare alla direttrice r. Questa incontra la piega a in A. Allora A è equidistante da P e dalla direttrice r quindi è un punto della $\gamma(P,r)$. Gli altri punti dell'asse a non appartengono alla $\gamma(P,r)$ in quanto la loro distanza da Pa (e quindi da P) è maggiore della loro distanza dalla direttrice r.

O8 "Dato un punto P, una piega r non passante per P, ed un ulteriore punto Q la cui distanza da P non sia inferiore di quella da r (con tale limitazione Q non è interno alla $\gamma(P,r)$), è possibile piegare come in O7 (cioè portare P su r) facendo però in modo che Q si sovrapponga a se stesso, ottenendo così una delle due tangenti per Q alla parabola $\gamma(P,r)$ (fig. 8)".

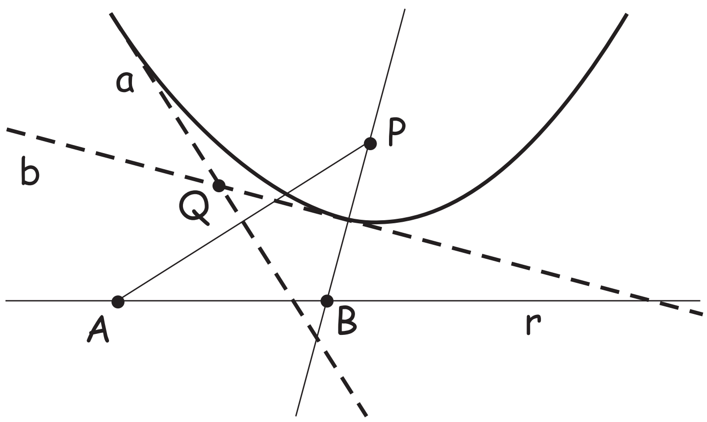


Fig. 8

Con le limitazioni imposte al punto Q, questa piega è sempre possibile. In particolare: se la distanza di Q da P è maggiore di quella da r, per quanto detto in O7, si ottengono le due tangenti alla $\gamma(P,r)$ passanti per Q; se invece la distanza di Q da P è uguale a quella da r, si ha una sola possibilità e quindi una sola tangente alla $\gamma(P,r)$ passante per Q il quale risulta quindi essere il punto di tangenza; se infine la distanza di Q da P è inferiore a quella da r non è possibile eseguire la piega descritta. (*)

O9 "Dati due punti distinti P_1 e P_2, e due pieghe distinte a e b, è possibile piegare, sovrapponendo contemporaneamente il punto P_1 ad un punto A della piega a, ed il punto P_2 ad un punto B della piega b (fig. 9)". Tale procedura, in virtù delle considerazioni precedenti, permette di ottenere una tangente comune alle due parabole $\gamma(P_1,a)$ e $\gamma(P_2,b)$.

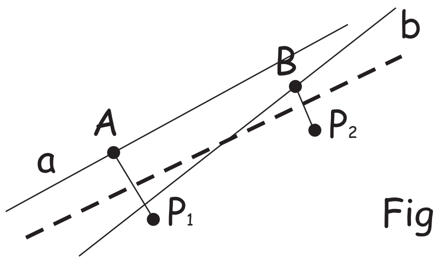


Fig. 9

Si può dimostrare, che questa procedura corrisponde a risolvere un'equazione di 3° grado. Pertanto la procedura è sempre possibile e, in casi particolari, in tre modi distinti.

Questa procedura O9 è quella che rende la geometria origami fondamentalmente diversa dalla geometria euclidea (e, in un certo senso, addirittura più "potente")

Per prendere confidenza con questa tecnica, proponiamo al lettore, tre problemi [4] da risolvere utilizzando esclusivamente le procedure **O1-O8**.

Costruire un triangolo rettangolo conoscendo le misure:

a) di due cateti congruenti ad AB e BC (Fig. 10a);

b) dell'ipotenusa congruente ad AB e di un cateto congruente a BC (Fig. 10b);

c) dell'ipotenusa congruente ad AB e dell'altezza ad essa relativa congruente a PH (Fig. 10c).

(*) Come sappiamo dalla geometria analitica, la ricerca della tangente ad una parabola è un problema di secondo grado, quindi questa piega corrisponde a risolvere un'equazione di secondo grado.

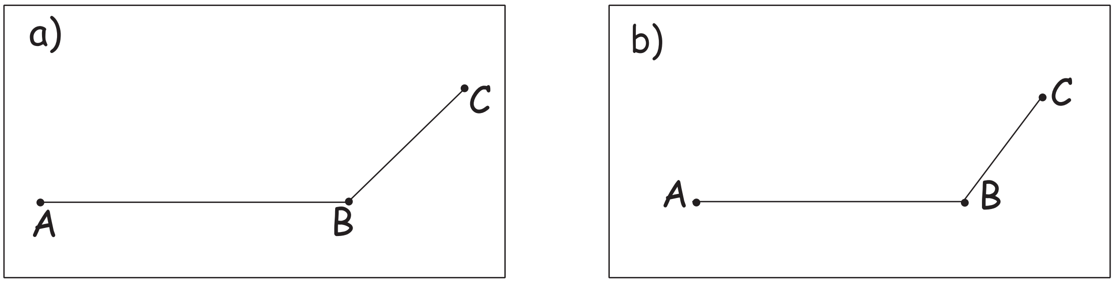
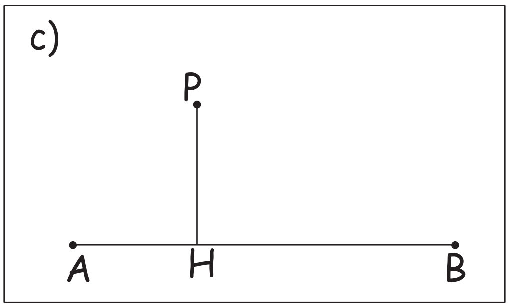


Fig. 10



Le risposte a questi problemi si trovano alla fine del prossimo capitolo.

Il presente articolo è stato stampato nella rivista trimestrale "**La Matematica e la sua Didattica**" Ed. Pitagora, marzo 1999.
La seconda parte è stata stampata nella stessa rivista nel numero di marzo 2000.

Riferimenti bibliografici:

[1] B. Scimemi
Algebra e geometria piegando la carta, in: Ed. Apeiron, **Matematica: gioco ed apprendimento**, Roma, 79-87.

[2] R. Geretschlager
Euclidean Constructions and the Geometry of Origami, Mathematics Magazine, 68, 5, 1995.

[3] H. Huzita
Axiomatic Development of Origami Geometry, in: H. Huzita (ed.), **Origami Science & Technology**, Ferrara 1989, 143-158.

[4] T. Sundara Row
Geometric Exercises in paper-folding, Dover Publications, 1966.

Origami: Geometria con la carta (II)

E' possibile mostrare (cfr. Geretschlager, 1995) che ognuna delle procedure **E1 - E5** della geometria euclidea, può essere sostituita da combinazioni delle procedure **O1 - O8** della geometria origami. Infatti abbiamo:

E1 E1 corrisponde ad O4;

E2 Non è possibile ottenere una circonferenza con piegature. Ma possiamo sicuramente assumerla come determinata conoscendone il centro O ed il raggio r, e potendone determinare un qualsiasi numero di punti e tangenti nei seguenti modi:

a) Sia O il centro ed r = AB il raggio della circonferenza (fig. 1a). E' possibile piegare A su O (usando la procedura **O5**) e questo porta il punto B su un punto B' (simmetrico di B rispetto a t) e quindi r = OB' in quanto simmetrico di AB rispetto a t (fig. 1b).

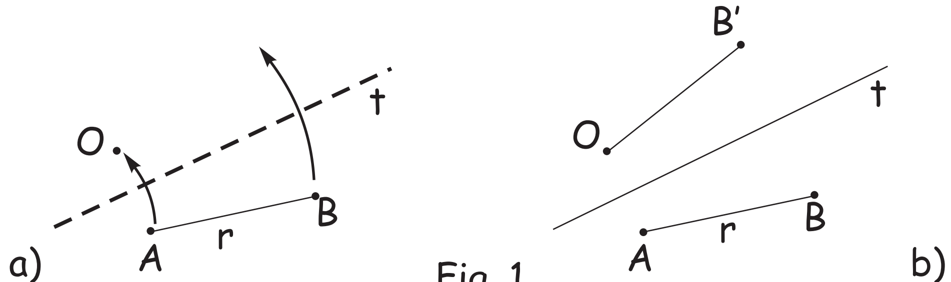


Fig. 1

b) Data una retta l passante per O, il raggio r = OB' può essere piegato (tramite **O2**) su questa (fig. 2a) per ottenere il punto P della circonferenza sulla retta del diametro l (fig. 2b). E' possibile ottenere anche il punto diametralmente opposto a P.

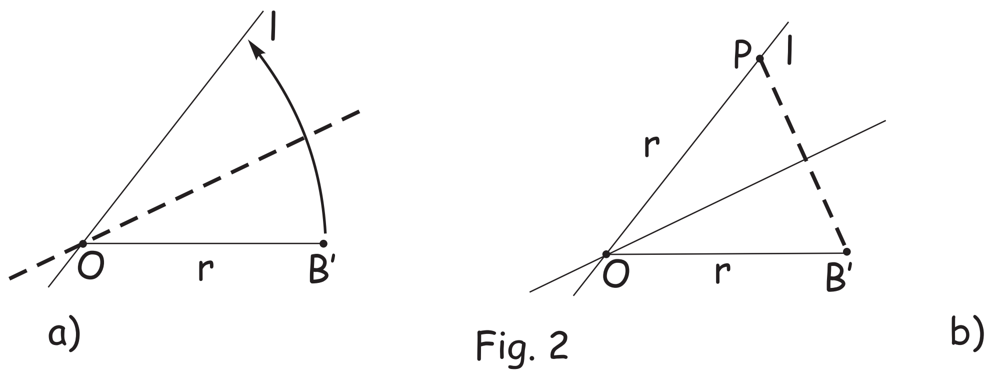


Fig. 2

c) Piegando (con la procedura **O6**) l su se stessa per P, (fig. 3a) costruiamo la retta t per P perpendicolare al diametro (fig. 3b) che in pratica risulta essere la tangente alla circonferenza in P.

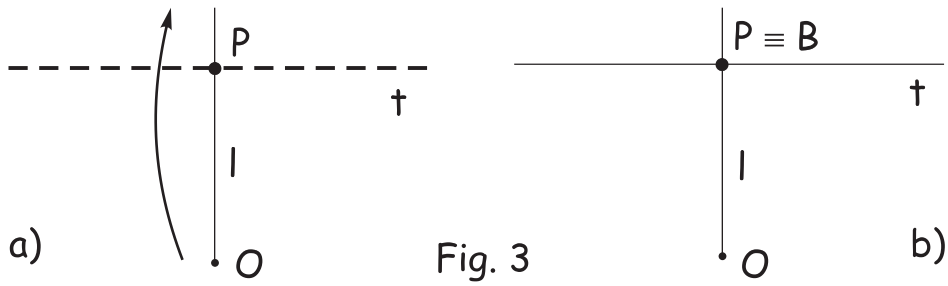


Fig. 3

E3 E3 corrisponde ad O1;

E4 Dato una circonferenza (centro O e raggio OP) ed una retta l, è possibile trovare i loro punti di intersezione piegando (fig. 4a), sovrapponendo prima P ad l in P' e successivamente P a P'' in modo che le pieghe passino per O (fig. 4b). Ciò è possibile in base alla procedura **O8**, in quanto trovare i punti di intersezione di una circonferenza con una retta è equivalente a trovare le due tangenti s e t per O ad una parabola di fuoco P e direttrice l. P' e P'' stanno sulla retta l e sulla circonferenza in quanto la loro distanza da O è uguale al raggio OP. Quindi P' è P'' sono le intersezioni cercate.

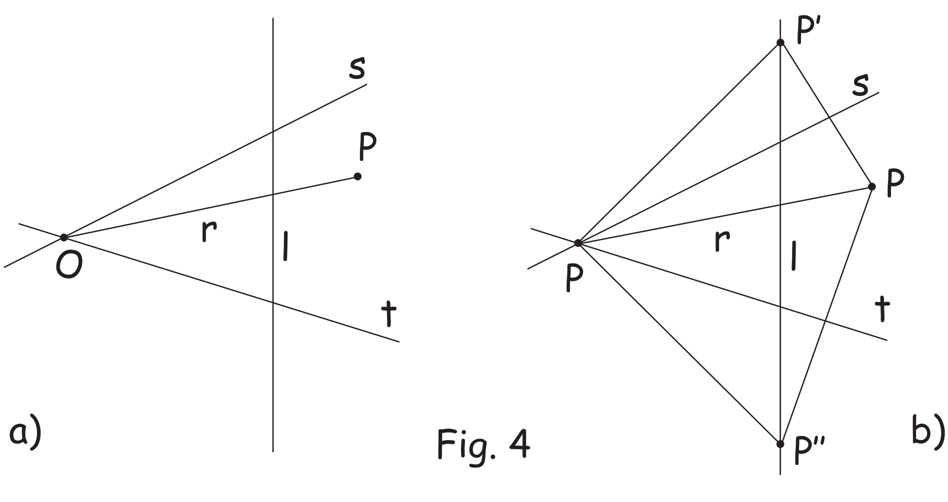


Fig. 4

E5 La circonferenza, nella geometria origami, è noto solo attraverso la conoscenza di determinati punti e tangenti, non è quindi possibile trovare direttamente le intersezioni tra due circonferenze. E' però possibile trovare l'asse radicale delle due circonferenze riconducendo perciò il problema a quello precedente cioè ad **E4**. Per trovare l'asse radicale procediamo nel seguente modo (fig. 5):

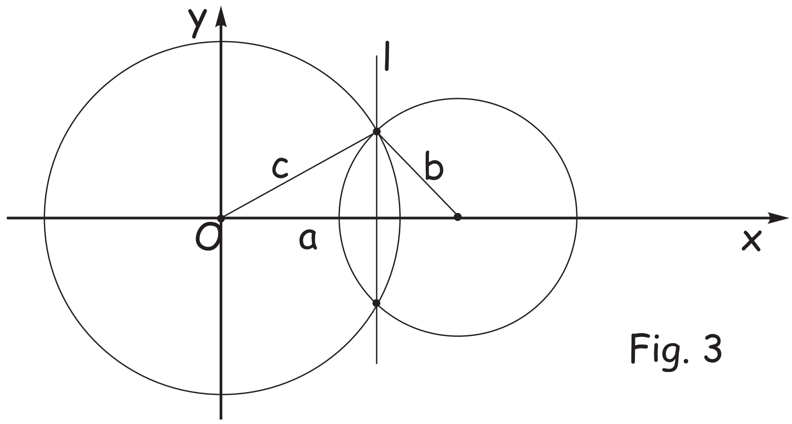


Fig. 3

Le due circonferenze, rispetto al sistema di coordinate XY, avranno equazione:

$C_1)$ $x^2 + y^2 = c^2$ e $C_2)$ $(x - a)^2 + y^2 = b^2$

il loro asse radicale avrà allora equazione:

$$x^2 + y^2 - c^2 = x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - b^2$$

cioè:

$$x = (a^2 - b^2 + c^2)/2a$$

I punti comuni alle due circonferenze si trovano quindi sulla perpendicolare alla congiungente i centri che dista dal centro della circonferenza di raggio c di $x = (a^2 - b^2 + c^2) / 2a$.

Questa retta può essere trovata con le procedure origami nei seguenti 4 passaggi (vedi anche la risposta agli esercizi alla fine):

a) Costruire il triangolo rettangolo avente i cateti di lunghezza a e c usando le procedure **O4-O6-O8**. La lunghezza dell'ipotenusa è allora $\sqrt{a^2 + c^2}$ (fig. 6a).

b) Costruire il triangolo rettangolo avente l'ipotenusa $\sqrt{a^2 + c^2}$ e un cateto b usando le procedure **O4-O6-O8-O4**.
La lunghezza dell'altro cateto è allora $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ (fig. 6b).

c) Costruire il triangolo avente i lati lunghi 1 e $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ con **O4**.
Poi costruire il triangolo simile con un lato lungo $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ con **O2**-**O4**-**O6**.
Il lato corrispondente al lato lungo ha lunghezza $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ (fig. 6c).

d) Costruire il triangolo avente i lati lunghi 2a e $a^2 - b^2 + c^2$ con **O4**.
Poi costruire il triangolo simile con un lato lungo 1 con **O4**-**O6**.
Il lato corrispondente al lato $a^2 - b^2 + c^2$ ha lunghezza $(a^2 - b^2 + c^2)/2a$, misura cercata (fig. 6d).

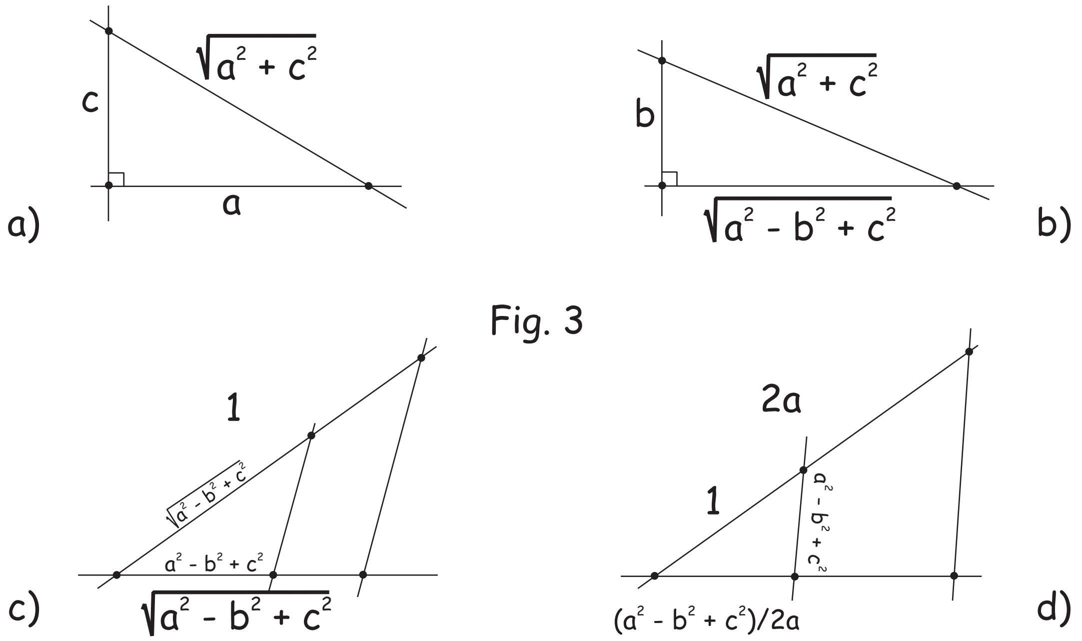


Fig. 3

Si può pertanto concludere che qualunque costruzione che può essere fatta con metodi euclidei, può essere ottenuta con metodi origami. E' possibile anche mostrare (cfr. Geretschlager, 1995) che ognuna delle procedure **O1**-**O8** della geometria origami, può essere sostituita da combinazioni delle procedure E1-E5 della geometria euclidea. Infatti abbiamo:

O1 O1 corrisponde ad E3;

O4 O4 corrisponde ad E1;

O2,**O3**,**O5**,**O6**, sono costruzioni notoriamente possibili con metodi euclidei;

O7 Data una retta d ed un punto F, per costruire una tangente alla parabola di fuoco F e direttrice d, si procede nel seguente modo (fig. 7):

Prendo un punto qualunque G sulla direttrice d, costruisco l'asse t (**E2**,**E5**,**E1**) del segmento GF che risulterà essere tangente alla parabola nel suo punto T (**E4**, **E5**, **E1** , **E3**).

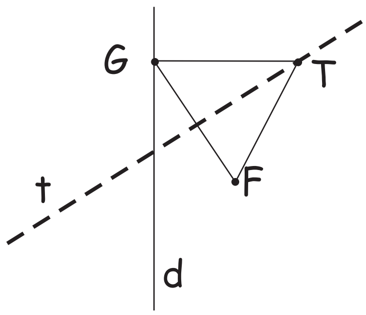


Fig. 7

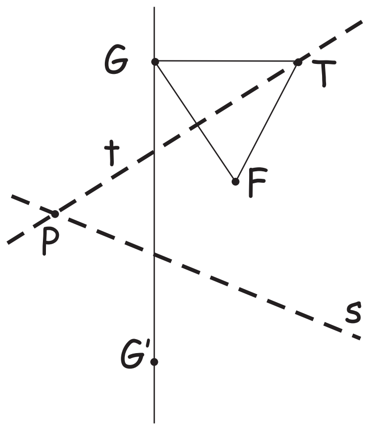


Fig. 8

O8 Data una retta d e due punti F e P, per costruire la tangente per P alla parabola di fuoco F e direttrice d, si procede nel seguente modo (fig. 8) Costruisco la circonferenza di centro P e raggio PF e trovo le intersezioni G e G' di questa con la retta d (**E2**, **E4**). L'asse t (**E2,E5,E1**) del segmento GF risulta essere la tangente per P alla parabola, T è il punto di tangenza (**E4, E5, E1, E3**). Lo stesso per ottenere l'altra tangente s.

Quindi ogni costruzione che può essere fatta con procedure origami (O1..O8) può anche essere ottenuta con metodi euclidei.

Per quanto detto prima perciò i due insiemi di procedure sono equivalenti. La procedura origami **O9**, aggiunge però altre costruzioni geometriche all'insieme delle possibile costruzioni generate da questi insiemi equivalenti. Quindi l'insieme delle costruzioni euclidee è un sottoinsieme proprio dell'insieme che può essere generato con metodi origami. Nel sistema euclideo si possono risolvere problemi di primo e secondo grado. E' un sistema geometrico chiuso: non è possibile svilupparlo introducendo nuove procedure che risolvano problemi di grado superiore al secondo. Il sistema geometrico della geometria origami, invece, è un sistema aperto: non essendo vincolato da strumenti, la scoperta di nuove pieghe può espandere il sistema verso la risoluzione di problemi d'ordine superiore.

Le procedure per la costruzione di un triangolo rettangolo avente:
a) i cateti congruenti rispettivamente a due segmenti dati AB e BC (fig. 9a);

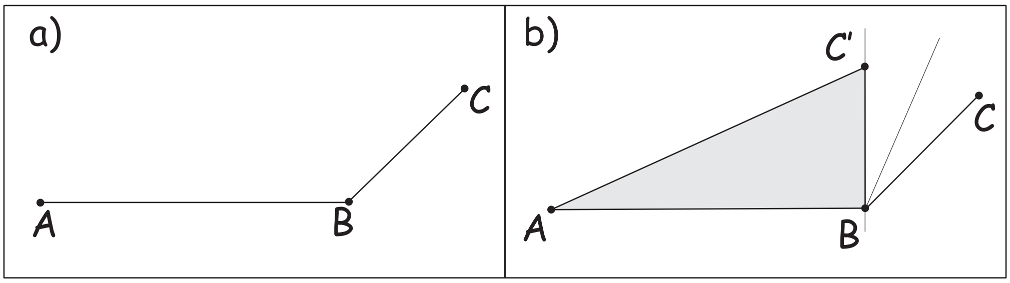


Fig. 9

Retta AB (**O4**) - Perpendicolare ad AB per B (**O6**) Portare C su a facendo perno su B (**O8**) - Retta AC' (**O4**) (fig. 9b).

b) l'ipotenusa ed un cateto rispettivamente congruenti a due segmenti dati AB e BC (fig. 10a);

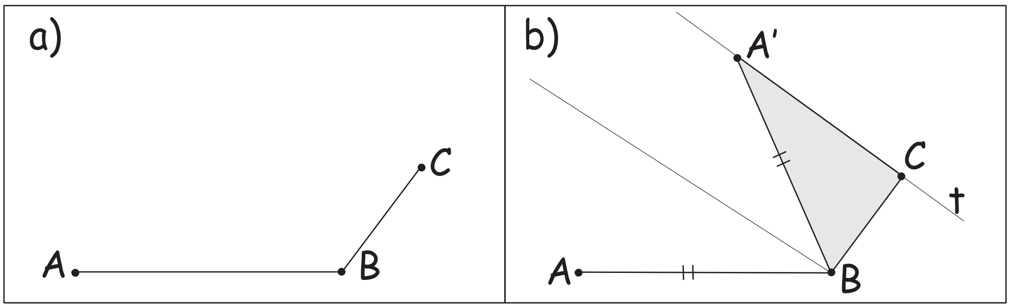


Fig. 10

Retta BC (**O4**) - Perpendicolare t a BC per C (**O6**) - A su t facendo perno su B (**O8**) - Retta A'B (**O4**) (fig. 10b).

c) l'ipotenusa e l'altezza relativa all'ipotenusa rispettivamente congruenti a due segmenti dati AB e PH (fig. 11a);

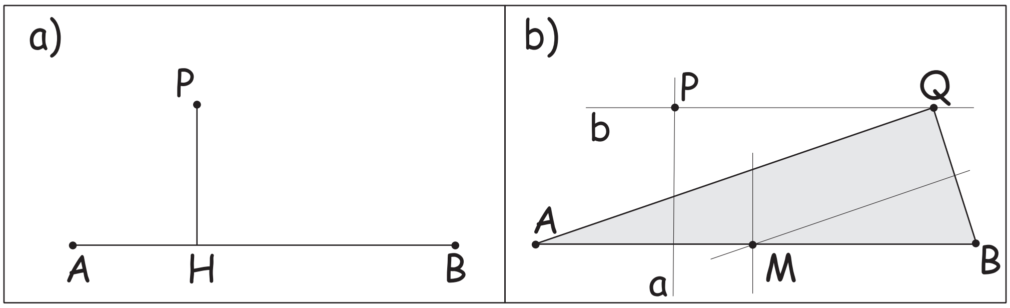


Fig. 11

Punto medio M di AB (**O5**) - Perpendicolare a ad AB per P (**O6**) - Perpendicolare b ad a per P (**O6**) - Facendo perno su M, B sulla retta b (**O8**) - Retta BQ (**O4**) - Retta AQ (**O4**) (fig. 11b).