



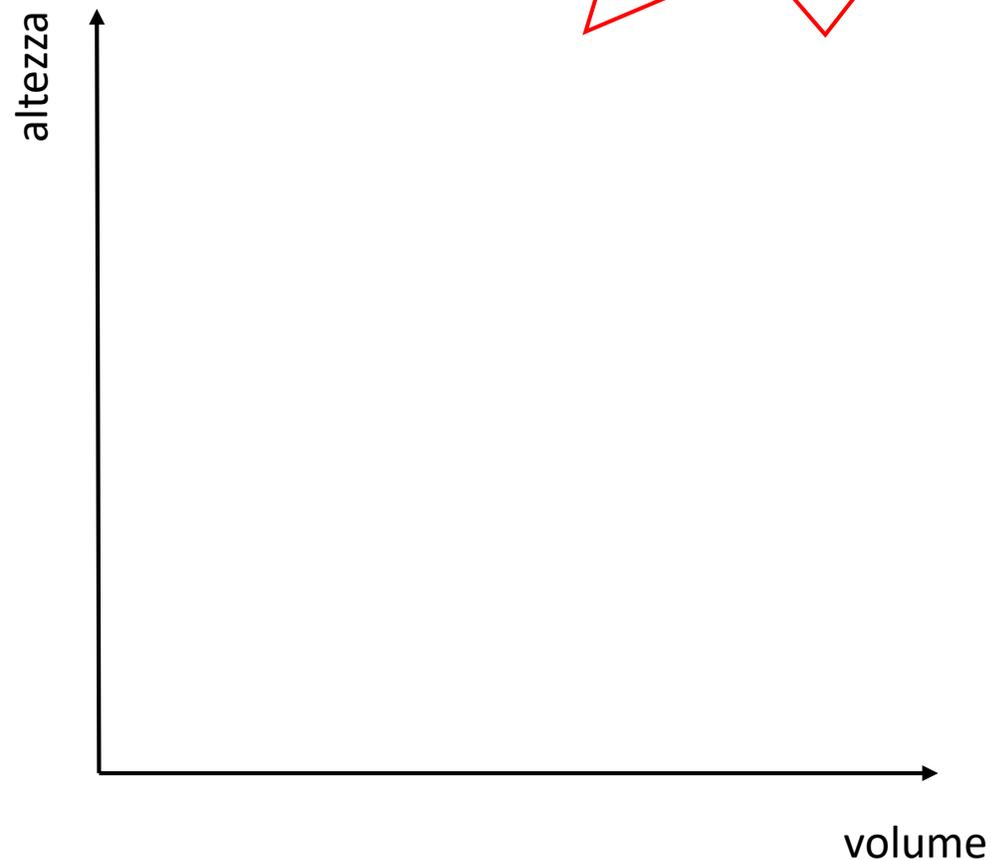
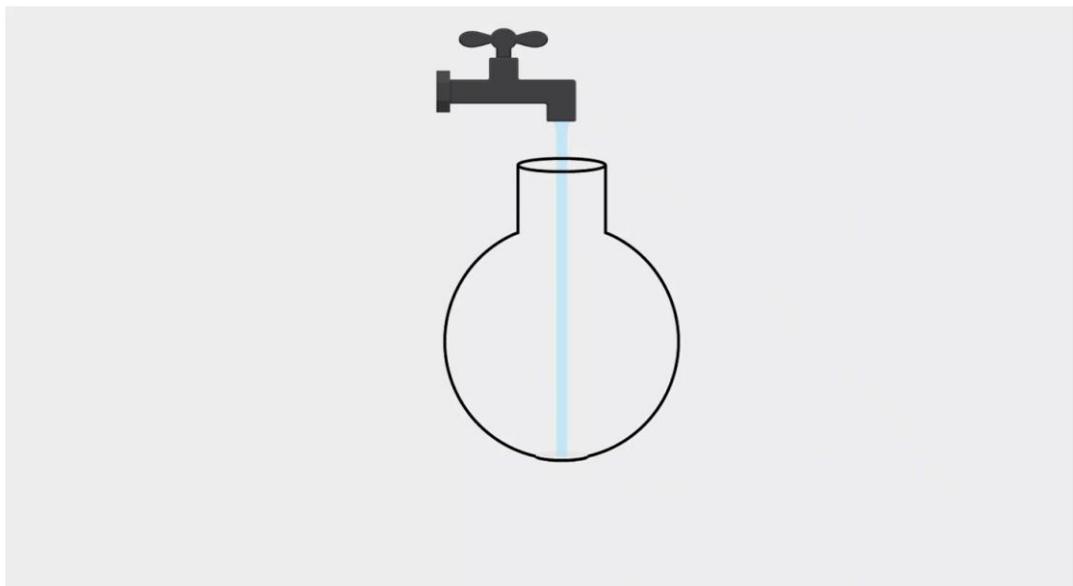
La nozione di co-variazione

Dalla teoria alla pratica in aula

Sara Bagossi – sara.bagossi@unife.it

Mathesis Ferrara – 25 Maggio 2020

Il problema della bottiglia

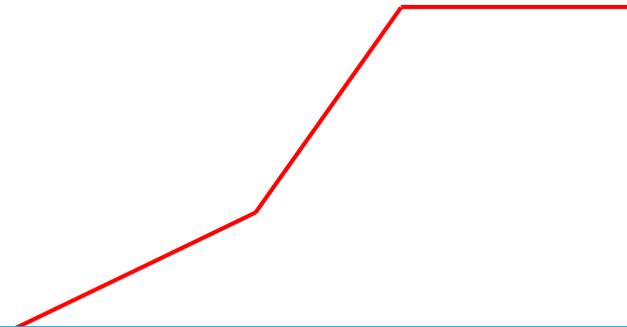


<https://teacher.desmos.com/waterline/walkthrough#Erlenmeyer>
<https://teacher.desmos.com/waterline/walkthrough#Evaporation>

Il problema della bottiglia

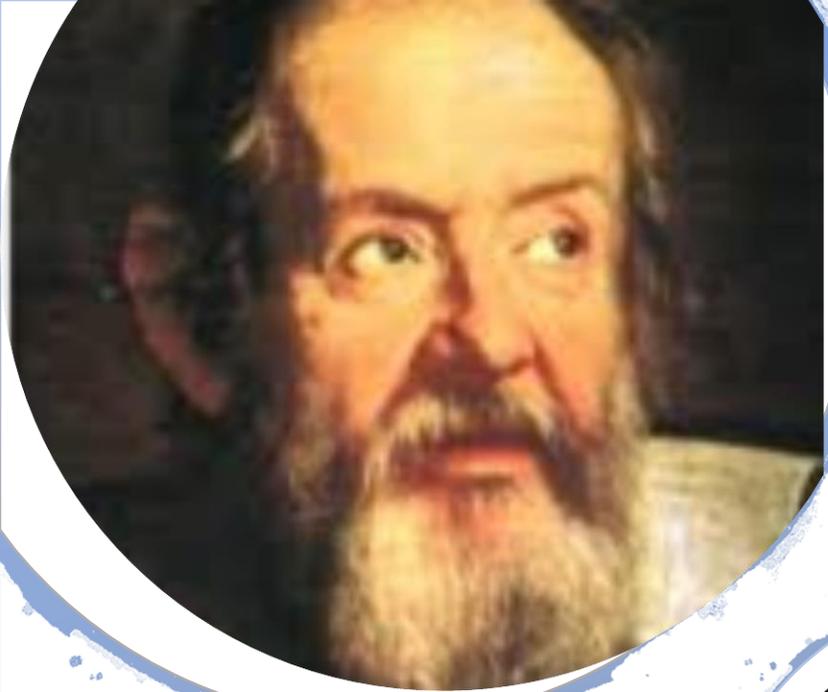


altezza



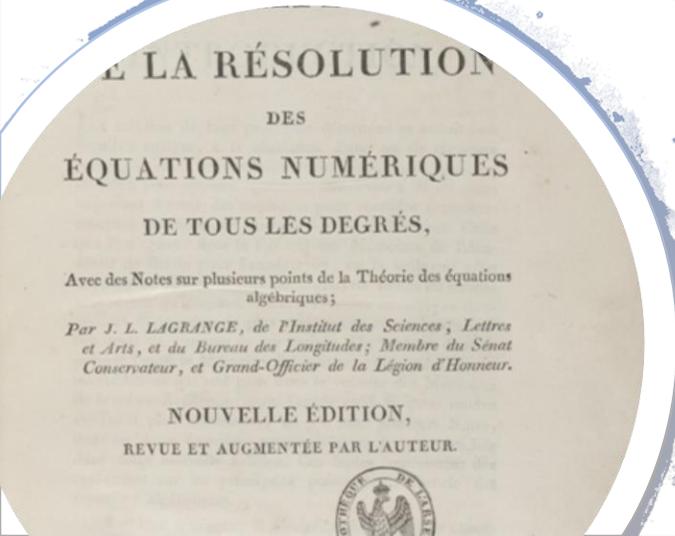
Una bozza di
soluzione di cui si
può discutere...

Provare a chiedersi come varia l'altezza del liquido al variare del volume del liquido versato significa **co-variare le grandezze altezza e volume del liquido.**



Le origini della co-variazione

La covariazione divenne un'esplicita forma di ragionamento già dagli inizi dell'anno 1000 e fondamentale fu il suo contributo sia per lo sviluppo dell'**algebra moderna** che della **scienza sperimentale**, quella delle *sensate esperienze e necessarie dimostrazioni* secondo l'approccio di Galileo.



La co-variazione come costrutto teorico

Nonostante il suo ruolo essenziale, la covariazione appare come **costrutto teorico** solamente negli anni '80 - '90 nei lavori di J. Confrey e P. Thompson.

Nella sua teoria del **ragionamento quantitativo** (1993), Thompson afferma che uno studente concepisce un attributo (per es. l'altezza del liquido nella bottiglia) come una **quantità** quando concepisce la possibilità di misurarlo.

In questa teoria le nozioni di variazione e covariazione sono costrutti essenziali per spiegare i ragionamenti degli studenti che emergono nella descrizione delle relazioni tra quantità e nella concettualizzazione di situazioni dinamiche.

La co-variazione come costrutto teorico

Thompson parla di **variazione** quando si riferisce alla concettualizzazione di singole quantità che variano (nel ns. es. come altezza e volume variano singolarmente nel tempo).

Con il termine **covariazione** definisce invece il sapere visualizzare due o più quantità che variano simultaneamente.

Nella più recente versione di questo costrutto teorico Thompson & Carlson (2017) propongono un'articolazione in **sei livelli** di ragionamento covariazionale.

Questi livelli possono essere intesi come descrittori di una classe di comportamenti oppure come caratterizzazione della capacità di una persona di ragionare in modo covariazionale.

Level	Description
Smooth continuous covariation	The person envisions increases or decreases (hereafter, changes) in one quantity's or variable's value (hereafter, variable) as happening simultaneously with changes in another variable's value, and the person envisions both variables varying smoothly and continuously.
Chunky continuous covariation	The person envisions changes in one variable's value as happening simultaneously with changes in another variable's value, and they envision both variables varying with chunky continuous variation.
Coordination of values	The person coordinates the values of one variable (x) with values of another variable (y) with the anticipation of creating a discrete collection of pairs (x, y).
Gross coordination of values	The person forms a gross image of quantities' values varying together, such as "this quantity increases while that quantity decreases." The person does not envision that individual values of quantities go together. Instead, the person envisions a loose, nonmultiplicative link between the overall changes in two quantities' values.
Precoordination of values	The person envisions two variables' values varying, but asynchronously—one variable changes, then the second variable changes, then the first, and so on. The person does not anticipate creating pairs of values as multiplicative objects.
No coordination	The person has no image of variables varying together. The person focuses on one or another variable's variation with no coordination of values.

5 Coordinazione liscia e continua dei valori

4 Coordinazione continua a pezzi dei valori

3 Coordinazione dei valori

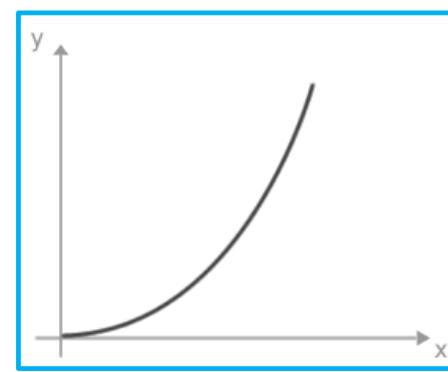
2 Coordinazione brutta dei valori

1 Pre-coordinazione dei valori

0 No coordinazione



La funzione come oggetto moltiplicativo



Nella definizione di covariazione Saldanha & Thompson (1998), si ispirano alla nozione di **oggetto moltiplicativo**, concetto derivato da Piaget.

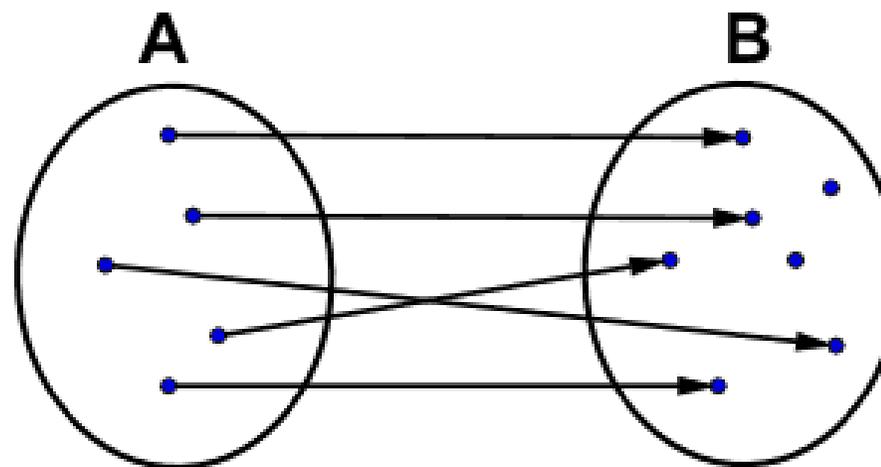
Essi affermano che *una persona forma un oggetto moltiplicativo a partire da due quantità quando mentalmente unisce i loro attributi per formare un nuovo oggetto che è, simultaneamente, l'uno e l'altro*.

In particolare Saldanha & Thompson per oggetto intendono un concetto matematico sul quale una persona può operare. Ne sono quindi un esempio una **funzione** o un sottospazio.

WHY?

Una definizione *statica* di funzione

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^3 - 2$$



«I valori di una variabile possono essere determinati unicamente dai valori di un'altra con una precisa legge di corrispondenza tra x e y che può essere

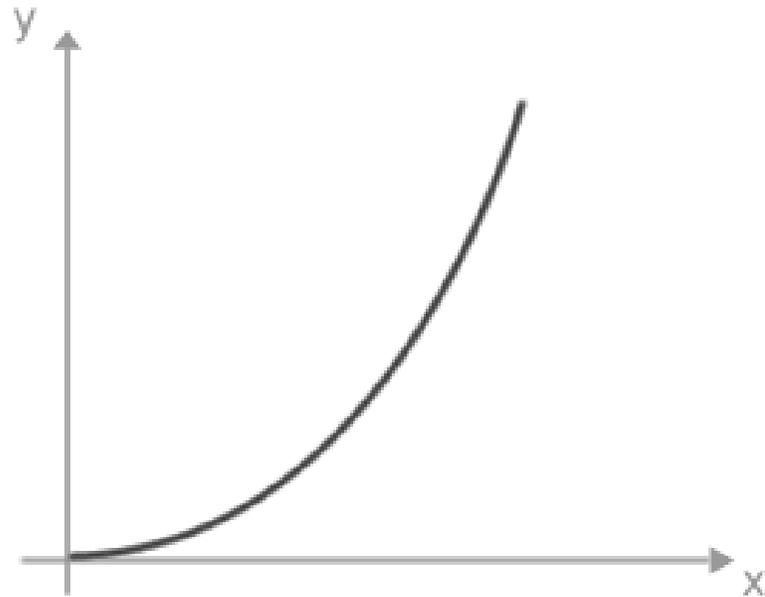
«Siano E e F due insiemi distinti o no. Una relazione fra una variabile x di E e una variabile y di F è detta relazione funzionale di E verso F , se, qualunque sia x in

La **visione statica** degli studenti di **situazioni dinamiche** può contribuire alla loro incapacità di costruire formule significative che rappresentano una quantità come funzione di un'altra.

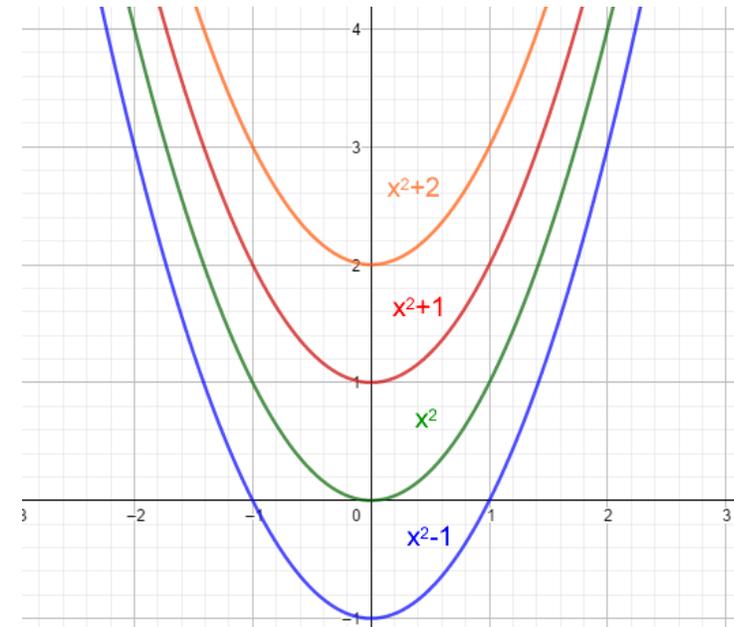
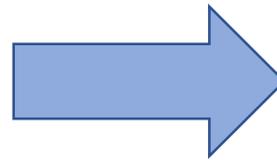
(Carlson, 1998)

lla
ne
 E
 x ;
c e
ale

Una covariazione più complessa...



Covariazione al 1° ordine
 $x \leftrightarrow y$

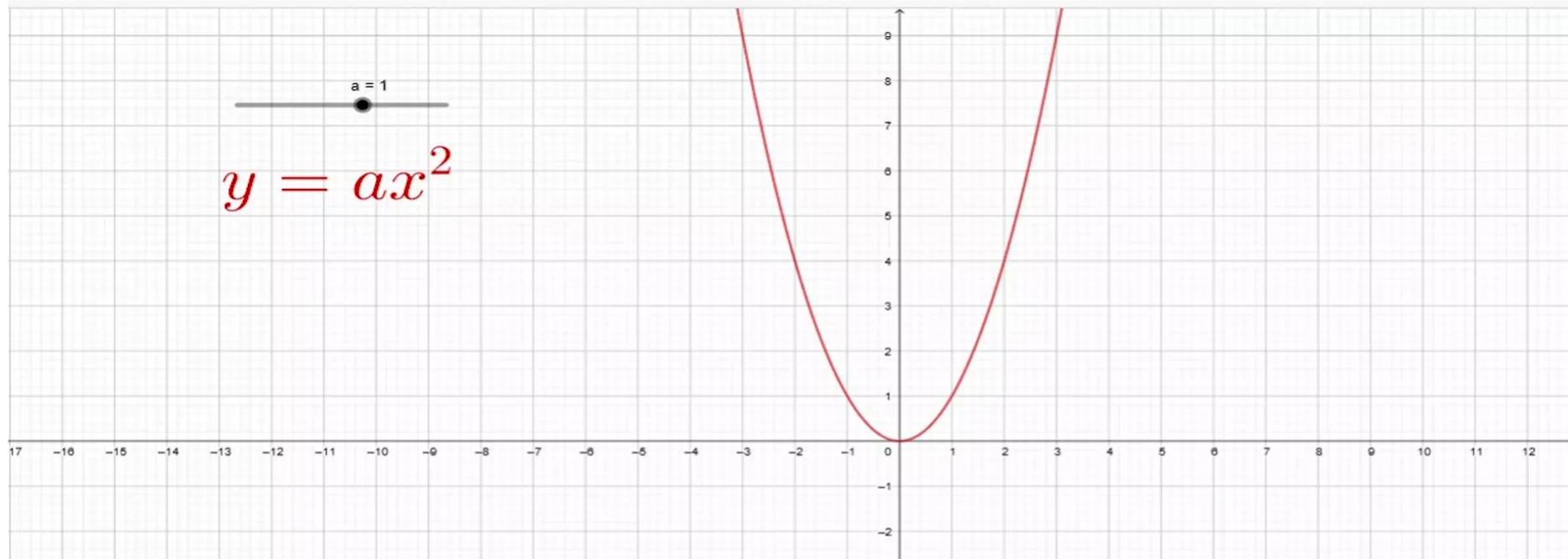


Covariazione al 2° ordine
 $(x, y) \leftrightarrow k$



Quali sono gli ingredienti della covariazione al 2° ordine?

Un quadro teorico più ampio



Si ha la **covarianza al 1° ordine** quando si concettualizza una relazione invariante tra due quantità i cui valori variano, mentre la **covarianza al 2° ordine** consiste nel cogliere un'ulteriore relazione in una famiglia di relazioni invarianti tra due quantità che variano.

F. Arzarello (2017) suggerisce di pensare alla covariazione come una forma di ragionamento che considera gli **oggetti matematici e le loro reciproche relazioni**.

Matematicamente, la **covariazione al 2° ordine** è espressa attraverso uno o più parametri in una famiglia di funzioni, tutte modellizzanti lo stesso fenomeno.

La covariazione al 2° ordine non può esserci senza la covariazione al 1° ordine, poiché il concetto di funzione è indispensabile per ragionare in termini di covariazione al 2° ordine.

Un'interpretazione matematica

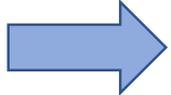
Teoria delle categorie (Lawvere, 1991)

Scegliamo come categoria base quella degli insiemi e indichiamo con Y^X l'insieme delle funzioni $f: X \rightarrow Y$

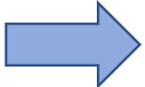
Data una funzione $g: A \times X \rightarrow Y$ si può considerare la funzione $g^* : A \rightarrow Y^X$, ovvero l'**aggiunta** di g definita come $g^*(a) = f$, dove f è la funzione in Y^X tale che $f(x) = g(a,x) \in Y$.

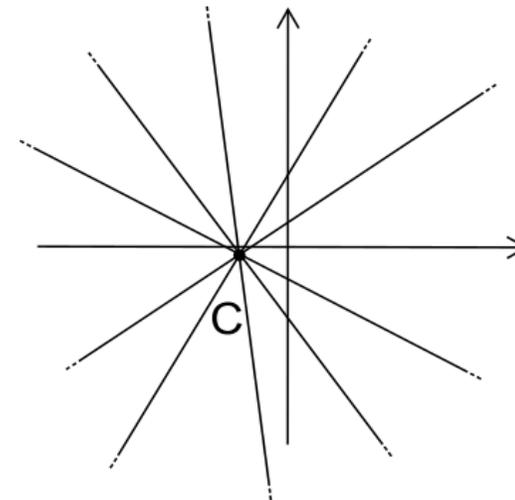
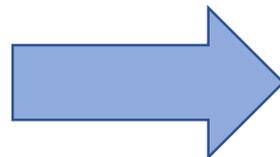
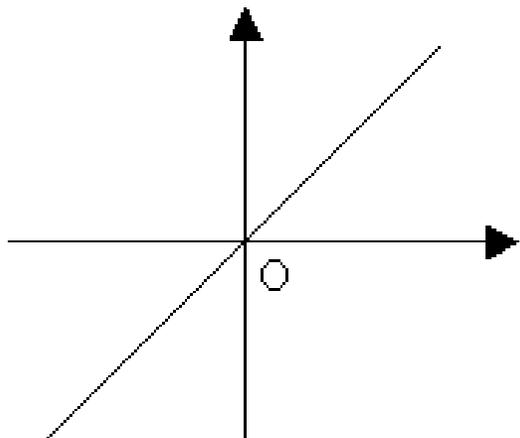
Un'interpretazione matematica

Esempio:

1° ordine: $y = 3x$  $g: (m, x) \mapsto mx$

1,5° ordine: LA funzione $y = mx$

2° ordine: LA FAMIGLIA di funzioni $y = mx$  $g^*: m \mapsto f$, dove $f: x \mapsto mx$





Livello cognitivo

- Esistono dei livelli cognitivi che connotano la covarianza del 2° ordine?
- Quali marcatori linguistici e gestuali connotano questi livelli?

L'istrumentazione a livello didattico

F. Arzarello (2017) chiama una possibile controparte didattica di questo costrutto **covariazione instrumentata** riferendosi nella terminologia all'approccio strumentale di Vérillon e Rabardel (1995).

Attività progettate con l'utilizzo di supporti tecnologici costituiscono un'istrumentazione dei processi covariazionali.

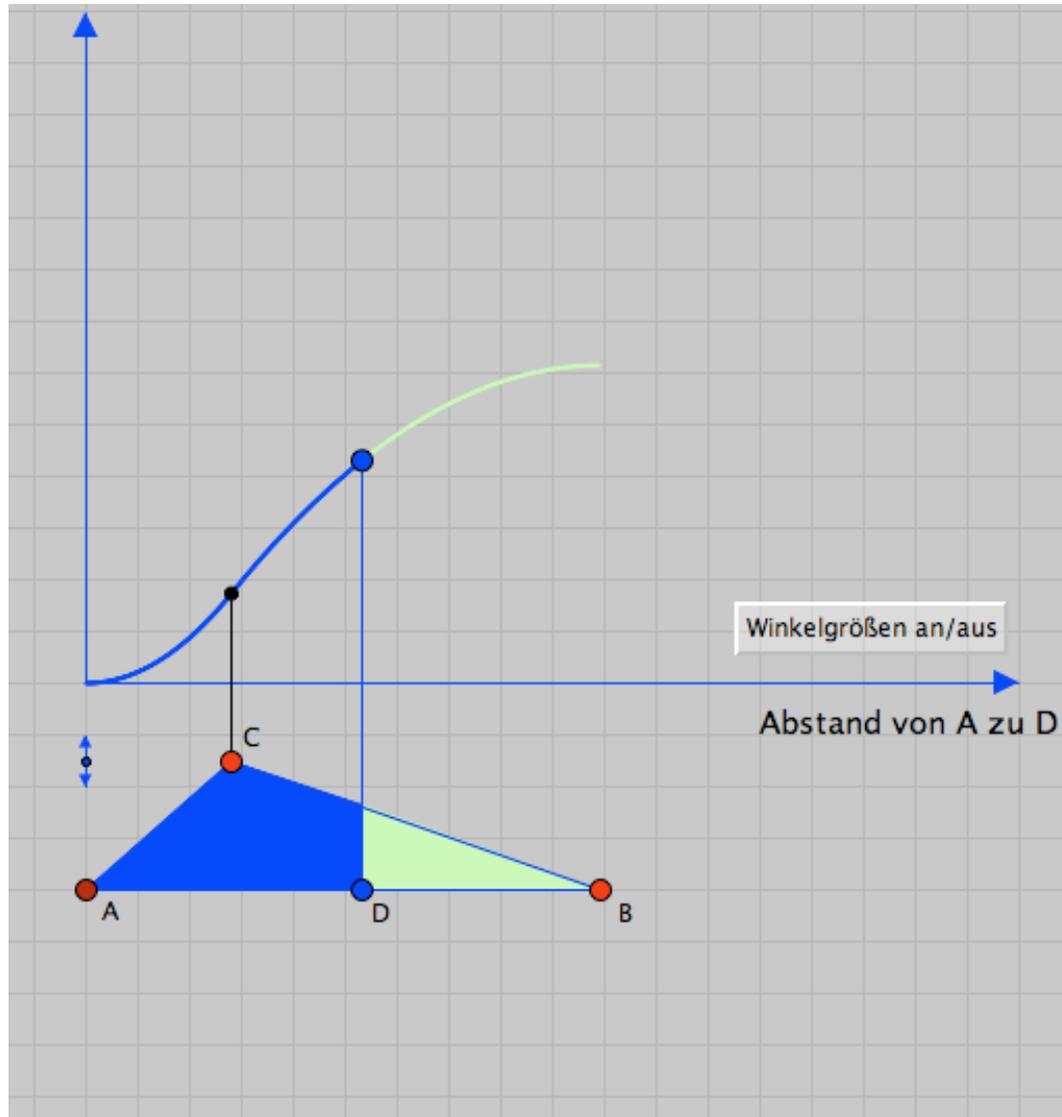
$$y = ax^2 + bx + c$$

ESEMPIO 1

a					b				
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
x	f(x)	df(x)	ddf(x)	x0	x	f(x)	df(x)	ddf(x)	x0
0	3	-3	-4	0	h+x0	a*(h+x0)^2+...	a*(3*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	x0
1	0	3	-4	1	2*h+x0	a*(2*h+x0)^2+...	a*(5*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
2	-3	-9	-4	2	3*h+x0	a*(3*h+x0)^2+...	a*(7*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
3	-12	-13	-4	3	4*h+x0	a*(4*h+x0)^2+...	a*(9*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
4	-25	-17	-4	4	5*h+x0	a*(5*h+x0)^2+...	a*(11*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
5	-42	-21	-4	5	6*h+x0	a*(6*h+x0)^2+...	a*(13*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
6	-63	-25	-4	6	7*h+x0	a*(7*h+x0)^2+...	a*(15*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
7	-88	-29	-4	7	8*h+x0	a*(8*h+x0)^2+...	a*(17*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
8	-117	-33	-4	8	9*h+x0	a*(9*h+x0)^2+...	a*(19*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
9	-150	-37	-4	9	10*h	a*(10*h+x0)^2+...	a*(21*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
10	-187	-41	-4	10	11*h	a*(11*h+x0)^2+...	a*(23*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
11	-228	-45	-4	11	12*h	a*(12*h+x0)^2+...	a*(25*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
12	-273	-49	-4	12	13*h	a*(13*h+x0)^2+...	a*(27*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
13	-322	-53	-4	13	14*h	a*(14*h+x0)^2+...	a*(29*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
14	-375	-57	-4	14	15*h	a*(15*h+x0)^2+...	a*(31*h^2+2*h*x0)+...	2*a*h^2	a
15	-432	-61	-4	15					

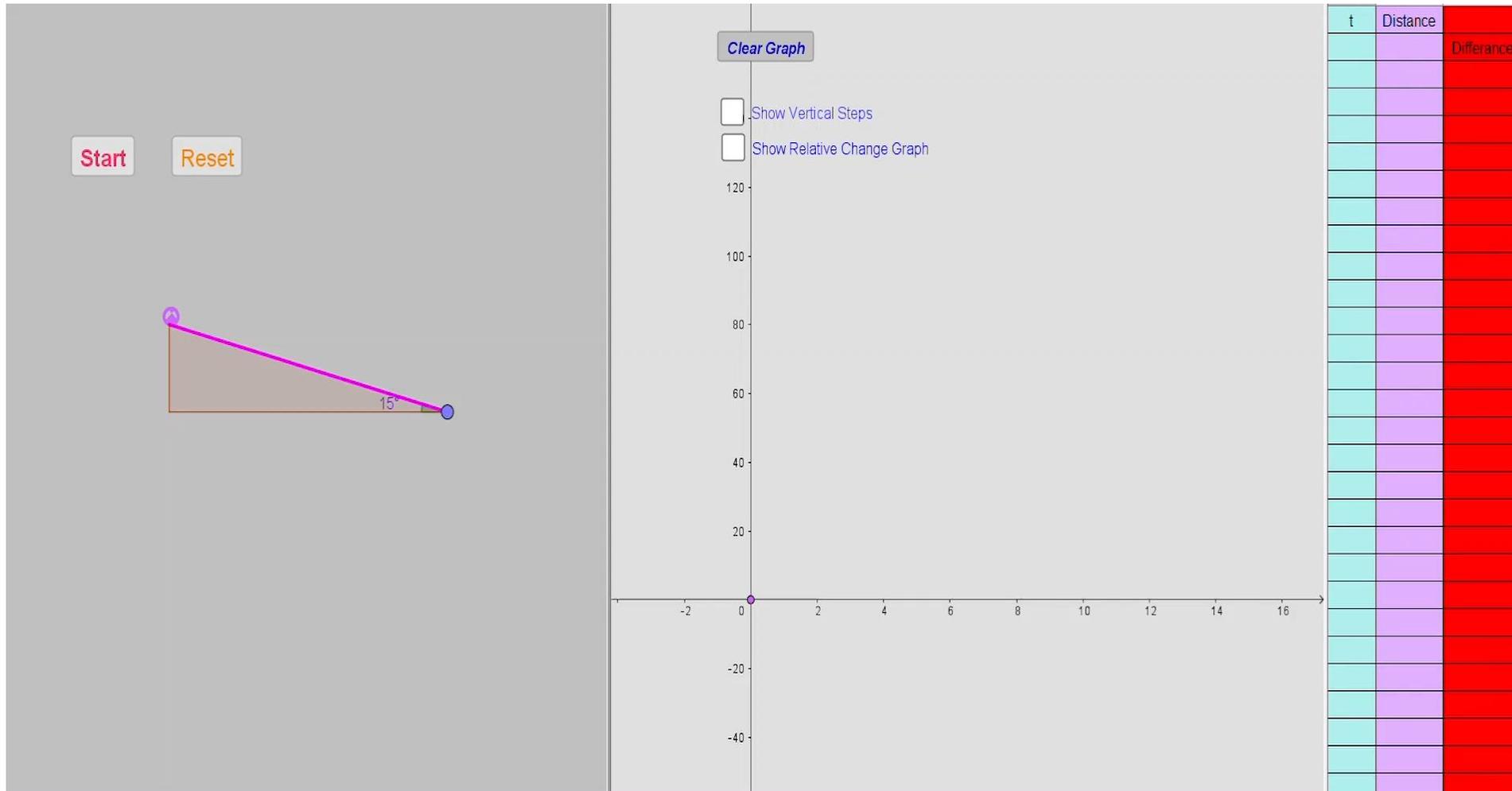
Fig. 5.3 (a) Numerical finite differences. (b) Algebraic finite differences

ESEMPIO 2



Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer, *Proceedings of CERME 6 - Lyon, France*, 1201 - 1210.

ESEMPIO 3



Arzarello, F. (2019). La covariación instrumentada: un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 14. Número 18. pp 11–29.



Quale ruolo svolge la tecnologia?

- Amplificatori visivi (es. applet in GeoGebra e Cinderella);
- Dedurre proprietà matematiche (es. tabelle con differenze finite).



Spazio per domande (I parte)

A collection of colorful, stylized icons representing various educational and technological elements. In the top left, there is a stack of three books with red, blue, and yellow covers. To the right is a laptop with a blue frame and a white keyboard; its screen displays a play button icon and a document layout. Below the books is a blue calculator with a red equals sign. In the bottom left, a glowing yellow lightbulb sits on a white base. In the top right, a white analog clock shows the time. In the bottom right, there is a red apple, a white mug with a yellow tea bag, and a yellow pencil. A smartphone with a blue screen is also visible near the bottom center. The background is a light blue gradient with a white horizontal band across the middle.

Una proposta didattica



Presentazione

L'attività si propone di presentare agli studenti una sensata esperienza in cui due o più variabili *covariano*.

L'attività è pensata suddivisa in lezioni successive in cui si alternano lavori di gruppo (piccoli gruppi di 3/4 studenti al massimo) a momenti di condivisione con discussioni dialogate e formalizzazioni del docente.

Fase 1: Introduzione

<https://www.repubblica.it/cronaca/2019/06/27/news/meteo-229750255/>

MENU | CERCA

la Repubblica

R+ | Rep. | ABBONATI | ACCEDI

f | | in |

Previsioni meteo, due giorni di caldo africano: temperatura percepita anche oltre i 50 gradi a Nord



Superati i livelli consentiti di ozono in Brianza, Alto Adige e nel Modenese. Ecco le città con bollino rosso

Si propone agli studenti la lettura di un *articolo di giornale* (da La Repubblica, giugno 2019) "**Previsioni meteo, due giorni di caldo africano: temperatura percepita anche oltre i 50 gradi a Nord**".

Nel testo si parla della "temperatura da bollino rosso", si distingue tra *temperatura* e *temperatura percepita* e fa riferimento a un popolare sito internet molto utilizzato per le previsioni atmosferiche.

Aprendo il sito indicato nell'articolo (ilmeteo.it), gli studenti possono individuare i dati per completare la seguente tabella, dati relativi ad alcune città ad una stessa ora scelta a piacere:

Località	Temperatura	Temperatura percepita	Precipitazioni	Umidità relativa (U.R.)	Umidità	Pressione
Ferrara						
Torino						
Roma						
Catania						
Tokyo						
Brescia						
Novosibirsk						
	Cosa osservate? Secondo voi cosa vogliono dire questi dati? Esiste una relazione tra questi valori?					



Fase 2: Condivisione

Gli studenti condividono le proprie **osservazioni** mediante una ***discussione collettiva*** orchestrata dal docente.

La fase di condivisione non deve essere esaustiva, ma ha il compito di condividere e soprattutto di porre l'attenzione degli studenti sulle relazioni tra i dati in gioco.

Segue una spiegazione del docente o una proposta di lettura di un testo scientifico in cui vengono introdotti i concetti di umidità relativa, assoluta, specifica e il punto di rugiada.

L'umidità assoluta (UA)

Misura quanti grammi di vapore acqueo sono presenti in 1 m³ d'aria umida, a una data temperatura e a una data pressione. Concretamente il confronto si fa tra il vapore e l'aria secca: ad es. 20%= 200 g di vapore per 1 kg di aria secca (pari a 1 m³ di aria secca).

L'umidità relativa (UR)

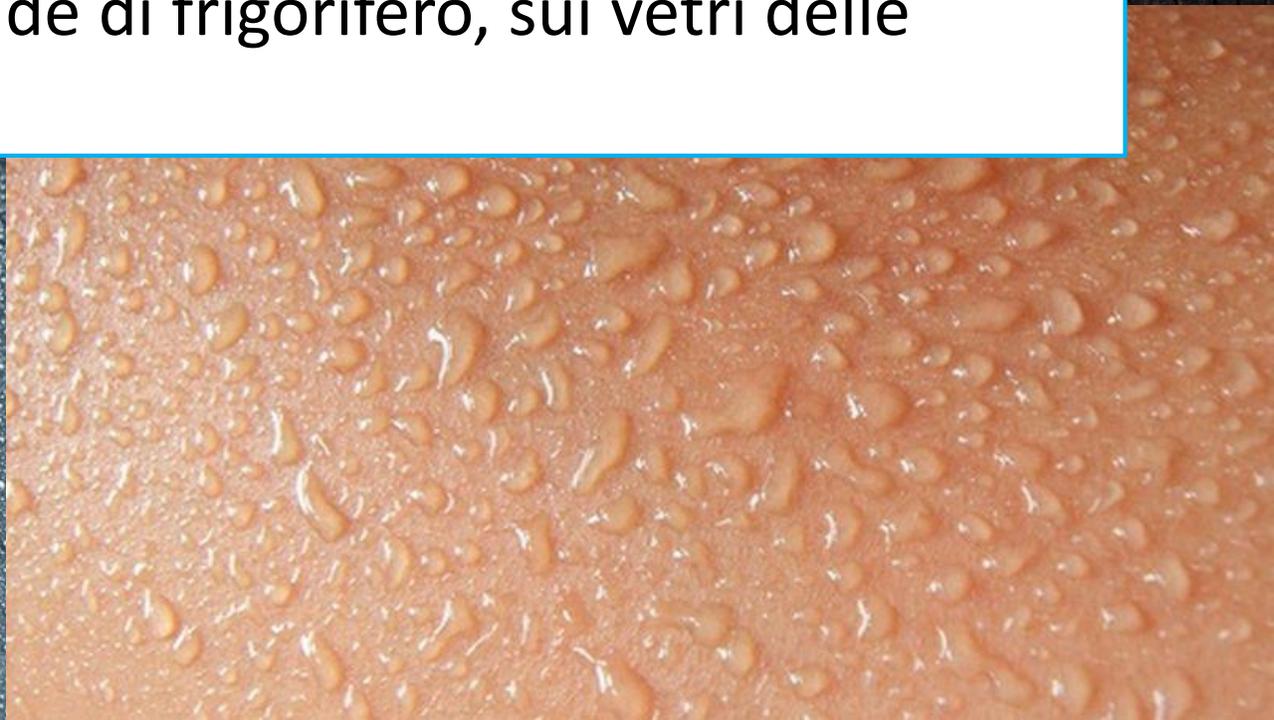
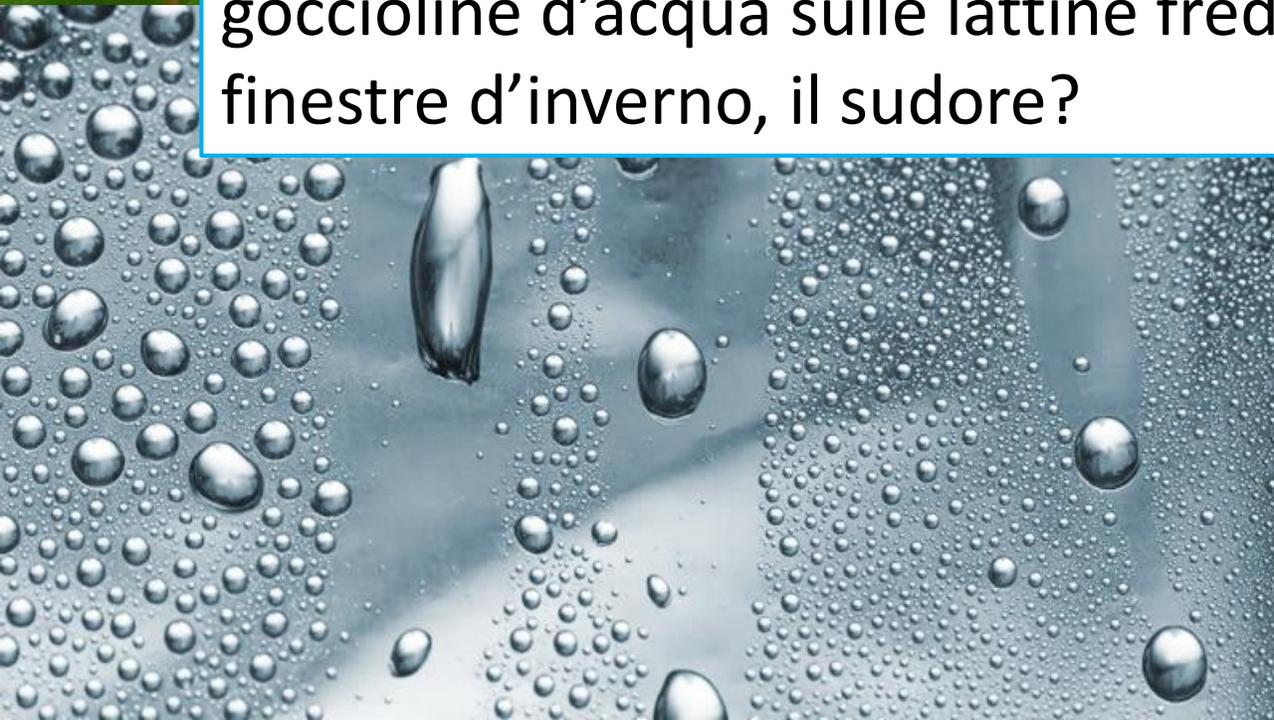
È la percentuale di vapore contenuto nell'aria in rapporto alla massima quantità in essa contenibile alla data temperatura (la quantità di vapore acqueo che può essere contenuto in un kg di aria secca non è illimitata: oltre una certa quantità il vapore aggiunto condensa sotto forma di minute goccioline formando l'effetto nebbia).

Punto di rugiada (Dew Point)

La temperatura alla quale il vapore acqueo inizia a condensare è detta **punto di rugiada** e dipende dalla temperatura e dall'umidità relativa. A temperatura inferiore, la velocità di condensazione supera quella di evaporazione: quindi si forma acqua liquida.

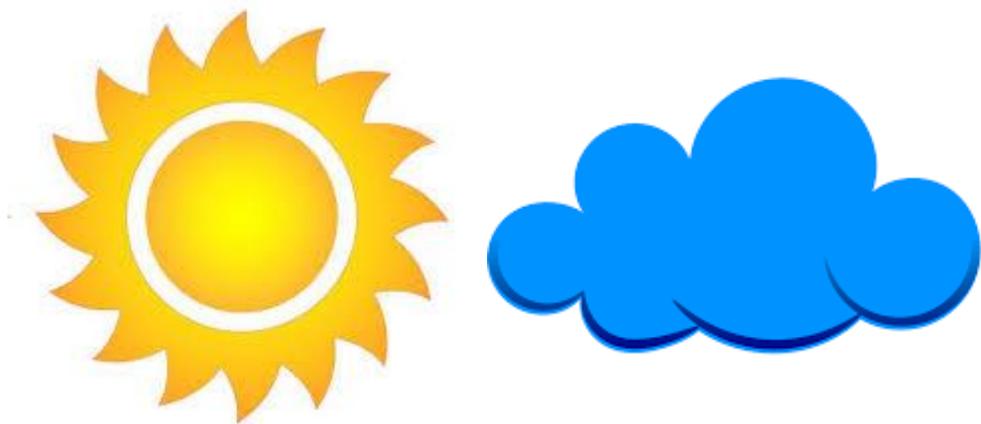


Perché si formano la rugiada sui prati d'estate e la brina d'inverno, le goccioline d'acqua sulle lattine fredde di frigorifero, sui vetri delle finestre d'inverno, il sudore?



Fase 3: Raccolta Dati

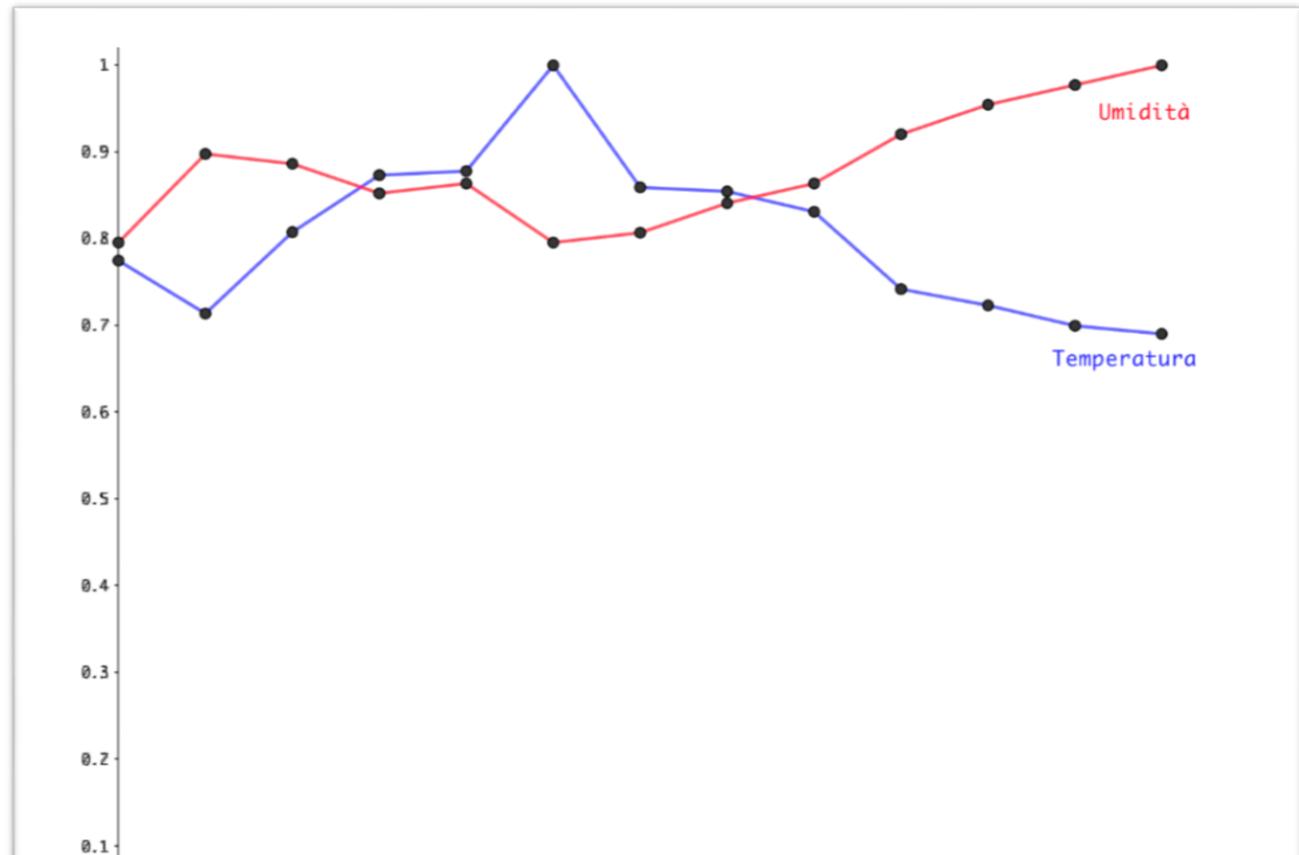
Compito per casa: rilevare temperature e umidità al trascorrere del tempo (in ore) in due giornate diverse.



Ora	Ore trascorse	Temperatura	Umidità
9:00	0	16,5°	70%
10:00	1	15,2°	79%
11:00	2	17,2°	78%
12:00	3	18,6°	75%
13:00	4	18,7°	76%
14:00	5	21,3°	70%
15:00	6	18,3°	71%
16:00	7	18,2°	74%
17:00	8	17,7°	76%
18:00	9	15,8°	81%
19:00	10	15,4°	84%
20:00	11	14,9°	86%
21:00	12	14,7°	88%

L'attività finale chiede agli allievi di inserire i dati di umidità e temperatura in GeoGebra.

Nota bene: per confrontare la temperatura con l'umidità si suggerisce agli studenti di dividere i dati per i massimi valori registrati.



Osservate i grafici così ottenuti, quali ipotesi potete avanzare? Esiste un legame tra temperatura e umidità? I grafici, secondo voi, confermano le congetture avanzate precedentemente? Perché? Se no, quali congetture modificate?



Fase 4 : Il punto di rugiada

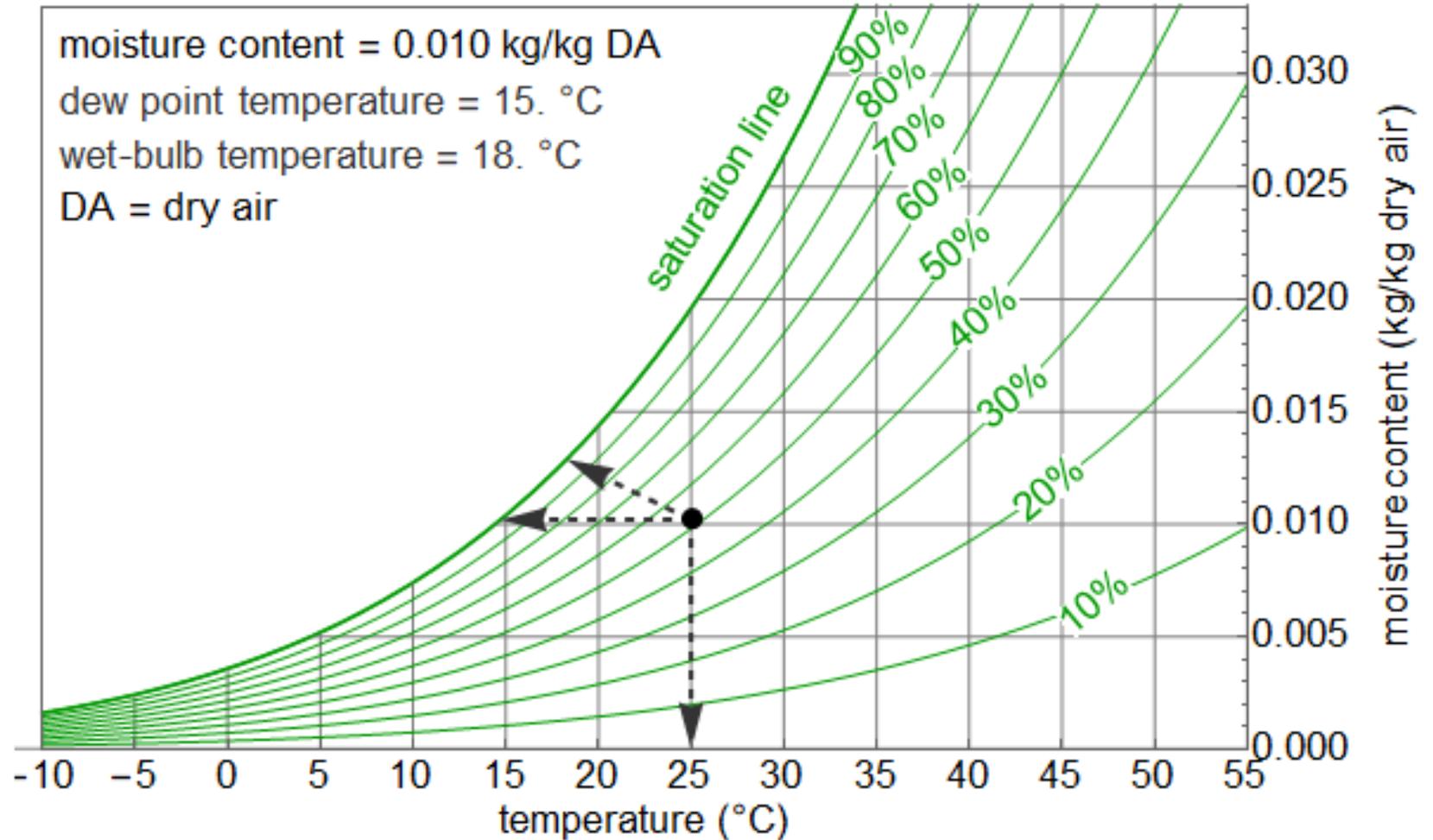
Esperimento in classe

Fase 5: La lettura della carta psicrometrica

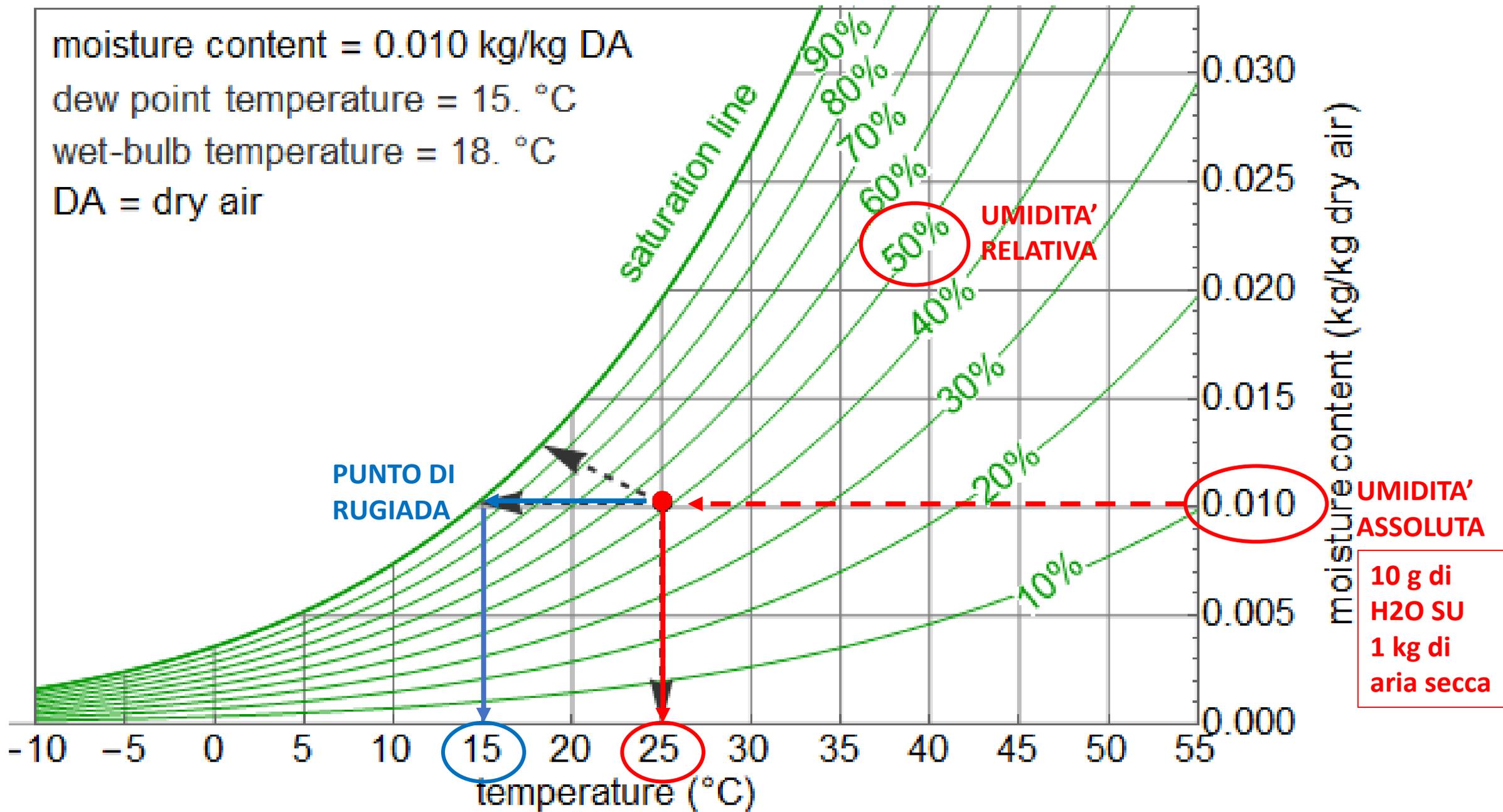
<https://demonstrations.wolfram.com/ReadingAPsychrometricChart/>

relative humidity enthalpy specific volume temperatures
display values grid lines

relative humidity (%) 52 dry-bulb temperature (°C) 25



moisture content = 0.010 kg/kg DA
dew point temperature = 15. °C
wet-bulb temperature = 18. °C
DA = dry air



Fase 6: Spiegare la realtà

Indice Humidex

$$H = T + 5/9 * (e - 10) = T + 0,5555 * (e - 10),$$

H non ha un'unità di misura propria, pertanto si può abitualmente associare alla stessa unità della temperatura (°C) anche se si tratta di un indice e non di una grandezza fisica.

$$e = \left(6,112 \cdot 10^{\frac{7,5 \cdot T}{237,7 + T}} \cdot \frac{UR}{100} \right)$$

e è la pressione di vapore dell'aria (hPa) osservata, misurata per esempio con uno psicrometro.
Poiché quest'ultima grandezza non è facile da reperire, la si può calcolare a partire dall'umidità relativa UR.

VALORI DELL'INDICE DI CALORE (HUMIDEX) E GRADO DI DISAGIO

Al di sotto di 29		Poche persone percepiscono disagio.																
Da 30 a 34		Sensazione di malessere più o meno significativa.																
Da 35 a 39		Sensazione di malessere abbastanza intensa. Prudenza. Limitare alcune attività fisiche gravose.																
a 40 a 45		Sensazione di malessere generalizzato. Pericolo. Evitare gli sforzi.																
Da 46 a 53		Grave pericolo. Sospendere le attività fisiche.																
Al di sopra di 54		Colpo di calore imminente (pericolo di morte)																
Temperatura (°C)		Umidità relativa (%)																
		20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
21	21	21	21	21	21	22	22	22	23	24	24	25	26	26	27	28	28	29
22	22	22	22	22	22	23	24	25	25	26	27	27	28	29	29	30	31	31
23	23	23	23	24	24	24	25	26	27	28	28	29	30	31	31	32	33	33
24	24	24	24	25	26	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	35	36	37
25	25	25	25	26	27	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
26	26	26	27	28	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
27	27	27	28	29	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
28	28	28	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
29	29	30	31	32	33	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
30	30	31	32	34	35	36	37	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
31	31	33	34	35	37	38	39	40	42	43	44	46	47	48	49	50	51	52
32	32	34	35	37	38	40	41	42	44	45	46	48	49	50	51	52	53	54
33	33	36	37	38	40	41	43	44	46	47	48	50	51	52	53	54	55	56
34	34	37	39	40	42	43	45	46	48	49	50	52	53	54	55	56	57	58
35	35	39	40	42	43	45	46	48	49	51	53	54	56	57	58	59	60	61
36	37	40	42	43	45	47	48	50	51	53	55	56	58	59	60	62	63	64
37	38	42	43	45	47	49	50	52	54	55	57	58	61	63	64	65	66	67
38	40	43	45	47	49	50	52	54	56	57	59	62	63	65	66	67	68	69
39	41	45	47	49	51	52	54	56	58	59	62	64	66	68	70	71	72	73
40	43	47	49	51	52	54	56	58	61	63	65	67	69	71	73	75	76	77
41	45	48	50	52	54	56	58	61	63	65	68	70	72	74	76	78	79	80
42	46	48	52	54	56	58	61	64	66	68	70	73	75	77	79	81	82	83

Castellano, C. (2003), L'indice di calore, quando l'umidità aumenta la sensazione di calore, *Società Meteorologica Italiana/redazione Nimbus* <http://www.nimbus.it/faq/030609indicecalore.htm>

Ripensando al curriculum scolastico, quali spunti/attività si potrebbero proporre per stimolare la covariazione?



Spazio per domande (Il parte)