Tra matematica dell'abaco e tradizione archimedea: Piero della Francesca e il volume della volta

Between abacus mathematics and Archimedean tradition: Piero della Francesca and the volume of the vault

Veronica Gavagna (veronica.gavagna@unifi.it), Università di Firenze

Salerno, 19 luglio 2022

Luca Pacioli, *Divina proportione*, Venezia 1509

Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium active perscrutationis, Tractatus Tertius, Casus 10

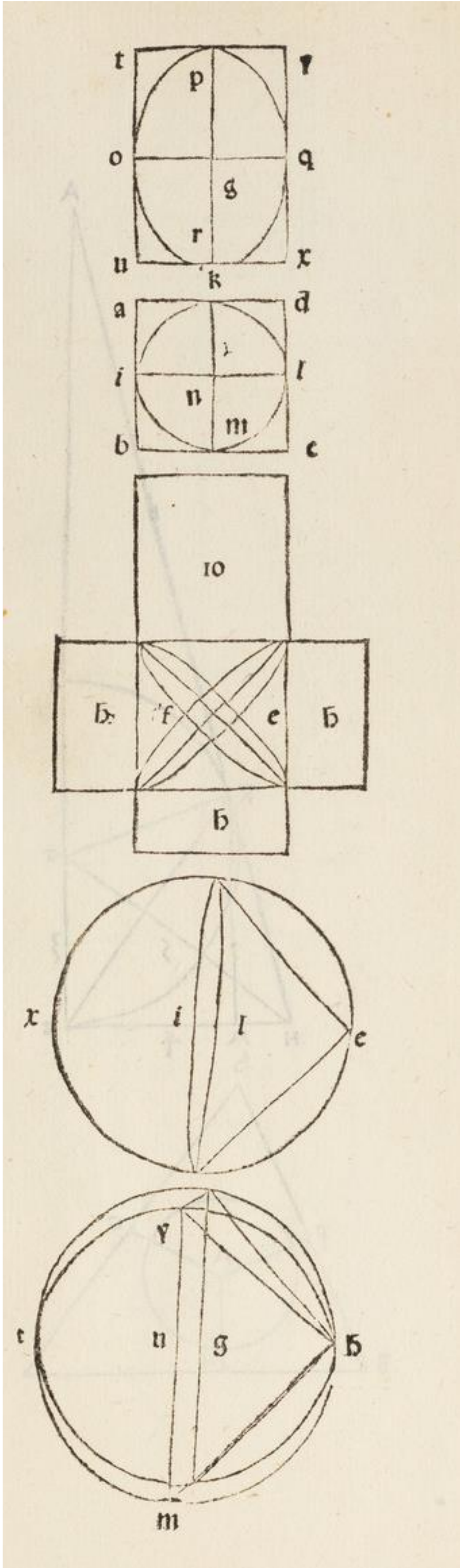
[1]**Casus 10.**

Egli è una colonna tonda a sesto che il diametro suo è 4 cioè de ciascuna sua basa et un'altra colonna de simile grossezza la fora hortogonalmente. Domandase che quantità se leva de la prima colonna per quella foratura cioè che quantità se leva de la colonna per quello buso.

Tu ài a sapere che la colonna forata, e nel curvo suo dove principia il foro et dove finisci nel curvo oposto he [forata] a la linea recta et l'axis de la colonna che fora passa per l'axis de la forata ad angulo recto et le linee loro fano uno quadrato nella loro curvità, et de sopra et de socto se coniungono in doi poncti cioe uno sopra e l'altro socto. Exemplo: sia la colonna forata H et la colonna che la fora G et il foro sia ABCD et i puncti de contacti de la loro curvità sia E, F del quale foro se cerca la sua quantità. Esse dicto che ciascuna colonna è 4 per grossezza adunqua il quadrato ABCD è 4 per lato, il quale lato multiplica in sé fa 16 et EF è pure 4 ch'è la grossezza de la colonna, che multiplicato con la superficie de la basa che è 16 fa 64, il quale parti per 3 ne vene $21^{1}/_{3}$ et questo redoppia fa $42^{2}/_{3}$ et 42 e $^{2}/_{3}$ se leva de la colonna H per lo dicto foro.

La prova: tu sai che le dicte colonne nel foro fano uno quadrato che è ABCD però fa' una superficie quadrata de simile grandezza che sia pure ABCD nella quale fa' uno circulo che sia IKLM et il centro suo sia N. Dapoi fa' una altra superficie che li doi lati oposti sia ciascuno equale a la diagonale AC del foro de la colonna et gli altri doi lati ciascuno equale AB il quale sia TVXY, nel quale descrivi uno circulo proportionato tocando ciascuno lato de tale quadrato in puncti O, P, Q, R et il centro suo sia S. Dico essere quella proportione dal quadrato ABCD al quadrato TVXY, che è dal circulo IKLM al circulo OPQR et quella proportione è dal tondo IKLM al quadrato suo ABCD che è dal tondo OPQR al quadrato suo TVXY, commo per la 5 del terzo di Archimede De conoidalibus. Hora dividi

[11] Ci uniformiamo alla trascrizione pubblicata nell'Edizione Nazionale di Piero della Francesca, ispirata a criteri di massima fedeltà all'originale, ma nell'ambito di un'edizione interpretativa (es: abbreviature risolte, si segue l'uso moderno per gli accenti e la punteggiatura, lettere maiuscole denotative e non minuscole come nella stampa, grafema ç in z etc).



il quadrato ABCD per equali con la linea KM, poi tira KL, ML farasse il triangulo KLM et devidi per equali il quadrato TVXY con la linea PR, poi la linea PQ, QR fasse il triangulo PQR. Dico quella proportione è dal triangulo KLM al triangulo PQR quale è dal quadrato ABCD al quadrato TVXY et quella che è dal triangulo KLM al suo quadrato ABCD quella è dal triangulo PQR al suo quadrato TVXY. Et de sopra fu dicto che tale proportione era dal tondo IKLM a la superficie ABCD quale era dal circulo OPQR a la superficie TVXY, adunque seguita per comuna scientia che tale proportione sia dal triangulo KLM al suo circulo IKLM, quale è dal triangulo PQR al suo circulo ORPQ.

Et questo inteso faremo le figure corporee, la prima fia la spera segnata EKMF e'l suo axis EF et l'altra, ch'è intorno al quadrato TVXY, sono doi circuli uno è TRXS e l'altro YRVS che se intersegano in puncto R et in puncto S[2]. Nelle quali figure corporee farò in ciascuna una piramide, nella spera EKMF linearò KM circulare, poi trarò KE, EM che fia KEM piramide su la basa tonda KLMI. Poi farò l'altra piramide nell'altra figura corporea che sirà TR, YR, XR, VR le quali piramide sono in proportione fra loro sì commo sono le loro matri, cioè le figure corporee nelle quali sono fabricate, commo se mostrò de sopra ne le superficie piane, commo il circulo TRXS è equale al circulo OPQR de la superficie TVXY et i lati de la piramide TR, RX sono equali a doi lati del triangulo PQR, cioè PQ, QR et KEM lati de la piramide de la spera ncioè KE || EM, sono equali a doi lati del triangulo KLM del circulo IKLM cioè KL, LM. Adunqua concludeno essere quella proportione de la piramide TR, YR, XR, VR al suo corpo TRXS[3], che è la piramide KEM ch'è la sua basa IKLM circulare, al suo corpo sperico KEMF. Adunqua per la 33 del primo De spera et cono de Archimede dove dici ogni spera esere quadrupla al suo cono del quale la basa è equale al magior circulo d'essa spera et l'axis equale al semidiametro, adunque piglia la basa TVXY che è 4 per lato, multiplica in sé fa 16, li quali multiplica per lo suo axis ch'è 2 fa 32 e questo parti per 3 ne vene 10 $^2/_3$ et il corpo suo TRXS è 4 tanti, però multiplica 10$^2/_3$ per 4 fa 42$^2/_3$, commo fu dicto de sopra et ài che se leva de la colona H per quello foro 42 e $^2/_3$.

[2] Il punto R coincide con E e il S con F
[3] TRXS: TVRS Pacioli

Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. III Part III *The Medieval Archimedes in the Renaissance 1450-1565*, The American Philosophical Society 1978, pp. 408-410.

There is a certain cylinder whose diameter is 4 brachia – the diameter of each of its bases – and another cylinder of the same size pierces it orthogonally. We seek the quantity that is removed from the first cylinder by means of this hole [i.e. we seek the volume of the common segment of the two cylinders].

You ought to know that the perforated cylinder is perforated in a straight line both at the beginning and the end of the cavity [i.e. the common segment], that is, where the hole [in the middle horizontal plane of the common segment] begins and ends [or, to put it another way, the common segment of the cylinders begins and ends in its middle horizontal plane with a straight line only] and the axis of the piercing cylinder crosses through the axes of the pierced cylinder at right angles in their cavity [i.e. in their common segment] and the lines of these [cylinders parallel to, and in the plane of, the intersecting axes] form a square [and, in fact, the intersecting lines in all the planes above and below and parallel with the plane of the axes form squares except] at the top and the bottom [where single lines only intersect] and [there] they touch each other in two points [only] one at the top and one at the bottom.

Example. Let the pierced cylinder be H and the piercing cylinder be G and let the hole [i.e., the middle horizontal element of the common segment of the intersecting cylinders] be ABCD, and let [the upper and the lower] touching points in their cavity [i.e. in their common segment] be E and F and we seek the volume of the hole [i.e. of the common segment of the intersecting cylinders]. We have said that the width [i.e. the diameter] of each cylinder was 4 brachia. Therefore, the square ABCD, is 4 brachia on each side. These sides multiplied together make 16 and EF, which is the width (i.e. the diameter) of a cylinder, is 4, and when multiplied by the surface of the base, i.e. by 16, makes 64. This you divide by 3 and 21 1/3 is the result. This doubled becomes 42 2/3 and so much is removed from cylinder H as the result [of the formation of the] said hole, i.e. 42/2/3.

This is proved as follows. You know that the said cylinders make a square in the hole, which square is ABCD. Therefore, you may draw a square hole of the same size which we let be ABCD and in it you inscribe circle IKLM with center N. Then you draw another [rectangular] surface TVXY, each of whose opposite sides is equal to the diagonal AC of the said hole, while each of the other two sides is equal to AB. In this you describe a proportional circle [i.e. an ellipse] tangent to each side of the said rectangle in points O, P, Q and R. Let its center be S. I say that the ratio of square ABCD to rectangle TVXY is as circle IKLM to ellipse OPQR, and the ratio of circle IKLM is to its square ABCD as ellipse OPQR is to its rectangle TVXY as is demonstrated by the fifth [proposition] of the third [work] of Archimedes, *On Conoids*. Now you divide square ABCD into equal parts by line KM. Then you draw lines KL and LM and △KLM will be formed; and you divide rectangle TVXY into equal parts by line PR. Then you draw lines PQ and QR, forming △PQR. I say that

$$\triangle KLM / \triangle PQR = \text{square ABCD / rect TVXY}$$

And

$$\triangle KLM / \text{square ABCD} = \triangle PQR / \text{rect TVXY}$$

And it was said above that

$$\text{Circle IKLM /square ABCD = ellipse OPQR / rect. TVXY}$$

And so it follows from common knowledge [viz. The axiom: quantities equal to the same quantity are equal to each other] that

$$\triangle KLM \text{ / circle } IKLM = \triangle PQR \text{ / ellipse } OPQR$$

Fig. III.2.3.5

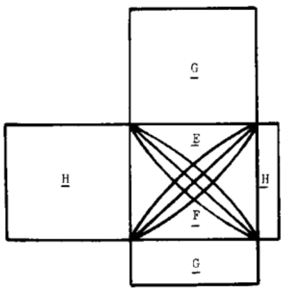


Fig. III.2.3.6

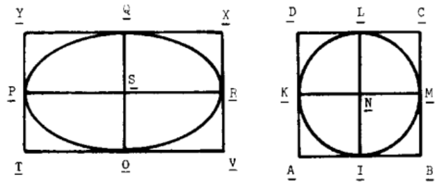
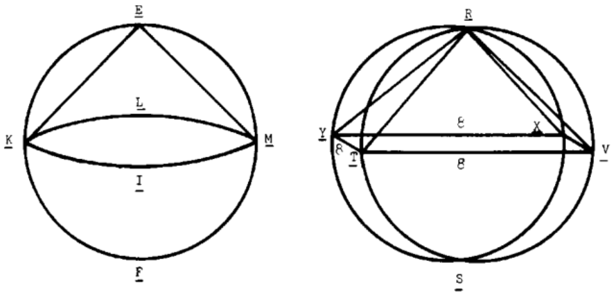


Fig. III.2.3.7



These figures are as in MS Urb. lat. 632, 60v; actually *TYXV* ought to be represented as a square, while *TRXS* and *YRVS* ought to be intersecting ellipses to represent Piero's view of the edges of the common segment.

Fig. III.2.3.8

And with this understood, let us make solid figures. The first will be spherical and designated EKMF with axis EF and the other which encloses square TVXY by means of two ellipses. One is TRXS and the other is YRVS and they intersect each other in point R and in point S. In each of these two [solid] figures I shall produce a pyramid. In the sphere EKMF I shall delineate EM circularly. Then I shall draw lines KE and EM and produce pyramid KLMI on the round base [i.e. I shall produce cone KLMI]. Then I shall produce another pyramid in the other corporeal figure, which will be TR, YR, XR, VR. These pyramids [i.e. cone and the pyramis] are in the same ratio as their parents, i.e. as the corporeal figures in which they are constructed, as is demostrated above in the plane figures, sice circle TRXS is equal to circle OPQR in surface TVXY and the sides of the pyramid TR, RX are equal [respectively] to the two sides of △PQR, i.e. PQ and QR. And the sides KE and EM of the cone in the sphere are equal [respectively] to the sides KL and LM of △KLM of circle IKLM. Let us conclude then that the ratio of the pyramid TR, YR, XR, VR to its [parent] solid TRXS [i.e. to the common segment of the two cylinders] is as the ratio of cone KEM whose base circle is IKLM to its [parent] spherical solid KEMF. Therefore by I.33 of *On the Sphere and the Cone* (!) of Archimedes, where he says that any sphere is quadruple the cone whose base is equal to a greater circle of the sphere and whose axis is equal to the radius [of the sphere], sphere KEMF is quadruple cone KEM and thus the parent solid TRXS [which is the common segment of the two cylinders] is quadruple pyramid TR, YR, XR, VR. And so you take the base TVXY which is 4 brachia on each side; multiply the sides together and the result is 16.This you multiply by the axis which is 2 and the result is 32. This you divide by 3 and 10 2/3 is the result [as the volume of the pyramid]. Its [parent] solid TRXS [i.e. the common segment of the cylinders] is 4 times as great. Therefore, mutiply 10 2/3 by 4 and the result is 42 2/3 as was said before. And thus you have what is removed from cylinder H by that hole [namely] 42 2/3 brachia.

Il volume della volta in Archimede, *Metodo (dei teoremi meccanici)*

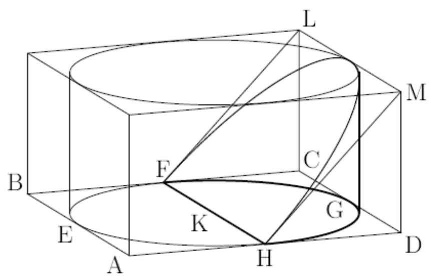
Dalla lettera a Eratostene:

Archimede ad Eratostene – salute!

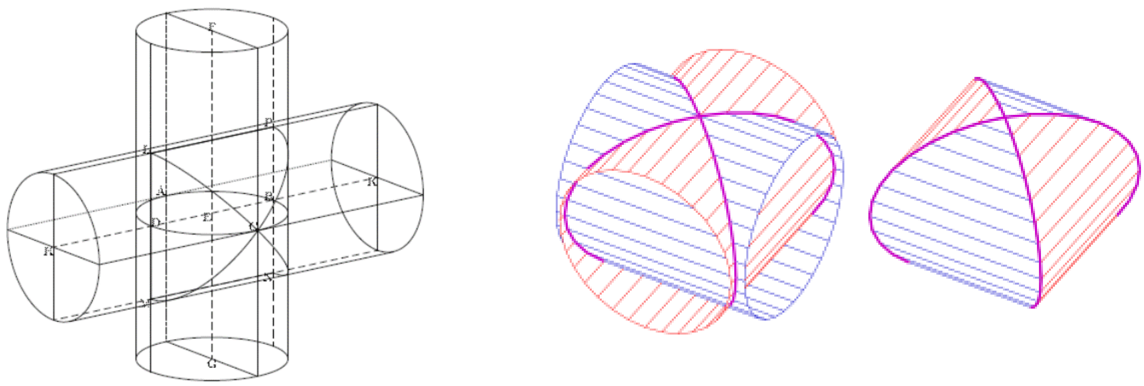
Tempo fa ti comunicai per iscritto gli enunciati dei risultati da me trovati, incitandoti a trovare quelle dimostrazioni che non ti dicevo sul momento. Gli enunciati dei risultati che avevo comunicato erano i seguenti. Primo: qualora in un prisma retto che ha un parallelogramma come base sia inscritto un cilindro che ha le basi nei parallelogrammi opposti e i lati tangenti alle quattro facce che restano, e per il centro del cerchio che è base del cilindro e per un solo lato del quadrato nella faccia opposta sia condotto un piano, il piano condotto resecherà dal cilindro un segmento che è compreso da due piani e da una superficie cilindrica – un piano è quello condotto, l'altro quello in cui è la base del cilindro, mentre la superficie è quella tra i detti piani – e il segmento resecato dal cilindro è la sesta parte dell'intero prisma. L'enunciato dell'altro risultato è il seguente: qualora in un cubo sia inscritto un cilindro che ha le basi sui parallelogrammi opposti e la superficie tangente alle quattro facce che restano, e nello stesso cubo sia inscritto anche un altro cilindro che ha le basi in altri parallelogrammi e la superficie tangente alle quattro facce che restano, la figura circondata dalle superfici dei cilindri (quella che è in entrambi i cilindri) è due terzi dell'intero cubo.

Si dà il caso che questi risultati siano di natura differente di quelli da me scoperti in precedenza […] *Ecco nel presente libro vado a comunicarti per iscritto le dimostrazioni di questi risultati* […] *sono convinto che se ne produca un'utilità non piccola per la materia – ritengo infatti che certuni (nel presente o nel futuro) potranno scoprire, grazie al metodo, altri risultati che non mi sono ancora venuti in mente.*

Metodo, 12, 13, 14, 15



Metodo, 16



Archimedes to Eratosthenes: Greetings.

Some time ago I sent you some theorems I had discovered, writing down only the propositions because I wished you to find their demonstrations, which I did not give at the time. The propositions of the theorems which I sent you were the following:

1. If in a right prism having a parallelogram2 as its base a cylinder is inscribed which has its bases in the opposite parallelograms and its sides on the other planes of the prism, and if a plane is drawn through <the center of the circle> that is the base of the cylinder and one side of the square in the opposite plane, the plane that is drawn will cut off from the cylinder a segment which is bounded by two planes and the surface of the cylinder – the one plane being that which was drawn, the other that in which is the base of the cylinder, and the surface that which is between the said planes. And the segment cut off from the cylinder is one sixth of the whole prism. The proposition of the other theorem is this:

2. If in a cube a cylinder is inscribed whose bases are against opposite parallelograms and whose surface touches the other four planes, and if in the same cube another cylinder is inscribed whose bases are in other parallelograms and whose surface touches the other four planes, then the figure enclosed by the surfaces of the cylinders and comprehended within both cylinders is two thirds of the whole cube.

These theorems differ from those formerly discovered […] Accordingly, I have written down the demonstrations of these theorems in this book and I am sending them to you. […] in the conviction that it would be of no small use formathematics; for I suppose that there will be some among present or future individuals who will discover by the method here set forth still other theorems which have not yet occurred to us.