Il preantipode ed il Teorema Fondamentale di Struttura per i quasi-bimoduli di Hopf

Paolo Saracco

1 Agosto 2014

Abstract

Il Teorema di Struttura per i moduli di Hopf afferma che una bialgebra H è un'algebra di Hopf (cioè, è dotata di un cosiddetto antipode) se e solo se ogni modulo di Hopf M è della forma $M^{\mathrm{Co}H} \otimes H$, dove $M^{\mathrm{Co}H}$ denota lo spazio dei coinvarianti di M. Esiste una generalizzazione parziale di questo risultato al caso delle quasi-bialgebre, dovuta ad Hausser e Nill, che afferma che se una quasi-bialgebra ammette un quasi-antipode, allora esiste un analogo dello spazio dei coinvarianti tale che ogni quasi-bimodulo di Hopf può essere decomposto allo stesso modo.

Obiettivo di questa presentazione è quello di introdurre la nozione di preantipode per una quasi-bialgebra e di mostrare come questo permetta di formulare una versione completa del Teorema di Struttura per i quasi-bimoduli di Hopf. Il preantipode, che si prova essere unico, si rivela essere dunque una generalizzazione dell'antipode apparentemente più efficacie del quasi-antipode: infatti, si dimostra che ogni algebra e quasi-algebra di Hopf ammette un preantipode e che i risultati classici, quali il Teorema di Struttura ordinario ed il teorema di Hausser e Nill sulle quasi-algebre di Hopf, possono essere riottenuti a partire dal nuovo Teorema di Struttura. Inoltre, come accade per le quasi-algebre di Hopf, le quasi-bialgebre con preantipode formano una famiglia chiusa rispetto all'operazione di *gauge twisting* introdotta da Drinfel'd.

Contestualmente, indagheremo quali relazioni intercorrano tra preantipode e quasi-antipode e studieremo alcuni casi in cui le due nozioni si rivelano essere equivalenti: bialgebre ordinarie dotate di riassociatore triviale, quasi-bialgebre commutative, quasi-bialgebre di dimensione finita.